

Leitura Complementar: Paradoxos, Probabilidades e Lei dos Grandes Números



Jacques Bernoulli

Ao longo da história da matemática existem diversos casos famosos, envolvendo grandes matemáticos, e que são considerados verdadeiros paradoxos, já que as respostas encontradas para alguns problemas não eram compatíveis com o que se esperava ou com o que a experiência prática indicava que iria ocorrer.

Vamos aqui relatar alguns desses casos interessantes e que normalmente estão relacionados à lei dos grandes números.

Mas, antes disso, vejamos o que os dicionários têm a dizer sobre “Paradoxos”:

- Opinião contrária à opinião comum ou ao senso comum;
- Contradição ou contra-senso, pelo menos aparente;
- Coisa que parece estar certa, mas gera um absurdo;
- Coisa incrível;
- Discordância, discrepância, desarmonia.

Se um cálculo envolvendo probabilidades está correto, o que ocorre é que, se repetirmos a experiência um grande número de vezes, o resultado obtido pela prática tende a se aproximar do resultado obtido teoricamente. É o que denominamos lei dos grandes números, que foi enunciada pelo grande matemático Jacques Bernoulli (1645-1705).

Vejamos dois exemplos disso:

- 1) Se lançarmos um dado equilibrado cúbico, com as faces numeradas de 1 a 6, a probabilidade de obtermos no sorteio o número 2 é $1/6$ ou $0,16666 \dots$ (e isso você deve bem saber o porquê). Vejamos o que ocorre se simularmos num computador esse sorteio, aumentando sempre o número de sorteios feitos.

nº de lançamentos	face 2	proporção
100	23	0,23

1 000	171	0,171
10 000	1688	0,1688
50 000	8266	0,16532

Veja que quanto maior o número de lançamentos do dado, mais o resultado experimental se aproxima da probabilidade esperada (que calculamos anteriormente).

Mas o que acontece quando o resultado da experiência, mesmo aumentando muito o número de ocorrências? Nesses casos, podemos afirmar que algum erro teórico deve ter sido cometido no cálculo da probabilidade de ocorrência do evento. Foi o que aconteceu no caso que vamos relatar a seguir onde, normalmente, matemáticos famosos acabavam envolvidos através de consultas que eram feitas pelas pessoas que não entendiam alguma discrepância entre o resultado prático e o teórico – eram os paradoxos. O caso em questão teve o envolvimento de Galileu Galilei.

Paradoxo 1: O Jogo dos três dados e a consulta a Galileu Galilei.

Jogadores e apostadores compulsivos têm hábito de apostar em tudo e de fazer apostas mais diversas, envolvendo cartas, dados, roletas, etc. No século XVII, por volta de 1620, Galileu Galilei, famoso matemático e astrônomo italiano escreveu “Considerações sobre o jogo dos dados” que narrava uma consulta que lhe foi feita por alguns apostadores, que consideravam que existia um paradoxo num jogo que faziam com o lançamento de três dados. Os jogadores achavam que no lançamento de três dados equilibrados, do tipo cúbico, com faces numeradas de 1 a 6, obter soma 9 ou 10 deveria ocorrer com a mesma frequência, já que, segundo eles, existiam 6 opções para que a soma resultasse no valor nove e as mesmas 6 opções para o valor 10. Veja na tabela a seguir essas maneiras.

9 pontos	10 pontos
1 2 6	1 3 6
1 3 5	1 4 5
1 4 4	2 2 6
2 2 5	2 3 5
2 3 4	2 4 4
3 3 3	3 3 4

Mas o paradoxo surgia quando iam para a prática, na hora do jogo verificavam que a soma 10 ocorria mais vezes do que a soma 9, mesmo que o jogo se repetisse

muitas vezes ou muitos dias seguidos. Não entendiam o que estava ocorrendo e fizeram a consulta ao renomado Galileu.

Para esse caso, fizemos também uma simulação por computador e obtivemos os seguintes resultados.

nº lançamentos	Soma 9	Soma 10
100	12	11
1000	137	124
10 000	1183	1260
20 000	2287	2493

Verifique que, com 20 000 lançamentos, a ocorrência da soma igual a 10 é maior do que a soma 9, o que não confirma o esperado pelos jogadores da época. Mas onde será que eles estavam errando? Qual a resposta de Galileu?

Galileu respondeu que esses resultados esperados não eram igualmente prováveis, por exemplo o resultado 9, obtido a partir da combinação 3 3 3 (três nos três dados) só tem uma possibilidade de ocorrência, enquanto que o resultado 10, obtido pela combinação 2 3 5, pode ser obtido de 6 modos distintos (2 3 5, 2 5 3, 3 2 5, 3 5 2, 5 2 3, 5 3 2). Galileu calculou que o resultado da soma igual a 10 podia ser obtido de 27 modos distintos e o da soma 9 só podia ser obtido de 25 maneiras distintas. Veja na tabela a seguir essas possibilidades:

9 pontos	Possibilidades	10 pontos	Possibilidades
1 2 6	6	1 3 6	6
1 3 5	6	1 4 5	6
1 4 4	3	2 2 6	3
2 2 5	3	2 3 5	6
2 3 4	6	2 4 4	3
3 3 3	1	3 3 4	3
total	25	total	27

Logo, conforme já comentamos antes, nesse caso o que havia era um erro de cálculo dos apostadores e a Lei dos Grandes Números de Bernoulli não poderia mesmo gerar, através da experiência, o resultado esperado por eles.