A Matemática da Educação Básica e a Matemática Financeira

Prof. Ilydio Pereira de Sá
UERJ – USS – PEDRO II

A MATEMÁTICA DA EDUCAÇÃO BÁSICA E A MATEMÁTICA FINANCEIRA

1) INTRODUÇÃO

> "...o conhecimento que se introduz nas escolas já é uma escolha de um universo muito mais vasto de conhecimento e princípios sociais possíveis. É uma forma de capital cultural que provém de alguma parte, e em geral reflete as perspectivas e crenças de poderosos segmentos de nossa coletividade social. Já na sua produção e propagação como mercadoria econômica e pública - na forma de livros, filmes, materiais... é continuamente filtrado através de vínculos ideológicos e econômicos...Uma vez que esses valores agem através de nós, quase sempre inconscientemente, a questão não está em como se manter acima da escolha. Está, antes em quais são os valores que se devem , fundamentalmente, escolher" (APPLE,M. Ideologia e Currículo, 1979:19).

Uma conceituada loja, numa promoção, oferece as seguintes opções de compra:

- à vista, com 30% de desconto sobre o preço de tabela;
- *com um acréscimo de 20% sobre o preço de tabela, em dois pagamentos "iguais" (entrada mais outro para 30 dias).*

Qual é a taxa de juros, sobre o saldo devedor, que a loja está cobrando na segunda opção oferecida?

Será que o professor, o educador matemático em geral, teve em sua formação escolar elementos para responder à questão acima, para descobrir que no "inocente" anúncio está inserida uma taxa de juros de 500% em apenas um mês? Será que temos condições de discutir questões como essa em classes da Educação Básica?

Com o surgimento da LDB, os PCNs e dos projetos políticos pedagógicos das Escolas, novos espaços e novas discussões se abriram para nós, educadores em geral. Constantemente somos convidados a tentar novas experiências, novos caminhos. Dessa forma, não podemos continuar a ministrar conteúdos tão desconexos da realidade de nossos alunos, e até mesmo da nossa vida, só porque alguém, em algum momento, os selecionou, priorizou ou hierarquizou. Não podemos nos contentar em responder evasivamente, que tudo o que ensinamos nossos alunos ainda precisarão "algum dia" ou que "vai cair na prova", quando questionados que somos sobre a validade ou intenção do que ensinamos. Nesse aspecto a Matemática Comercial e Financeira, tão presente desde cedo na vida de todas as pessoas, pode desempenhar um importante papel para nossa prática docente.

Sabemos que, normalmente, nos cursos de Formação de Professores (nível médio ou superior) a Matemática Comercial e Financeira não costuma ser abordada e, quando isso ocorre, ela tem um enfoque superficial ou meramente técnico, da mesma forma que é ministrado para um profissional de Economia, ou Administração.

Nosso enfoque estará respaldado em diversos anos de pesquisa e ensino em classes de ensino fundamental, médio, e superior, bem como em cursos de atualização de professores e priorizará mostrar que temos várias oportunidades de inserir a Matemática Financeira na Educação Básica, explorando situações do cotidiano dos alunos ou do mercado financeiro brasileiro. Todas as atividades e exemplos que serão apresentados, já foram desenvolvidas em diversas classes de séries distintas dos Ensinos Fundamental e Médio dos Colégios Pedro II e Fernando Rodrigues da Silveira (Colégio de Aplicação da UERJ), bem como nas aulas ministradas no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Severino Sombra – Rio de Janeiro.

Assim sendo, nosso principal objetivo ao longo do estudo será relacionar conteúdos tradicionais da matemática clássica, como: operações com números decimais, progressões aritméticas, progressões geométricas, logaritmos e equações polinomiais, com os temas fundamentais da matemática financeira.

2) PROGRESSÕES ARITMÉTICAS x JUROS SIMPLES

2.1) INTRODUÇÃO

Quando escrevemos qualquer quantidade de números, um após o outro, temos o que chamamos de seqüências. As seqüências são, freqüentemente, resultado da observação de um determinado fato ou fenômeno.
Imagine, por exemplo, que uma pessoa acompanhasse a variação do dólar (compra) nos primeiros dez dias (úteis) do mês de dezembro de 2006. Vejamos o resultado de sua pesquisa na tabela a seguir:

Dia útil (dez. de 2006)	Dólar (Compra)	Dia útil (dez. de 2006)	Dólar (Compra)
1º	R$ 2,1664	6º	R$ 2,1434
2º	R$ 2,1685	7º	R$ 2,1376
3º	R$ 2,1552	8º	R$ 2,1473
4º	R$ 2,1520	9º	R$ 2,1451
5º	R$ 2,1420	10º	R$ 2,1452

Verifique que os valores listados, que possuem uma certa ordenação, constituem uma seqüência. Convenciona-se designar por uma letra minúscula qualquer (normalmente **a)** a qualquer um dos termos de uma seqüência, usando como índice um número que denota a posição do termo na seqüência. Assim, a notação $\mathbf{a_1}$ representa o primeiro termo da seqüência, que no nosso exemplo do dólar é o valor 2,1664. A notação $\mathbf{a_{10}}$ representa o décimo termo e assim sucessivamente.

- Quando desejamos falar sobre um termo qualquer de uma seqüência, escrevemos $\mathbf{a_n}$.

Você pode usar as seqüências para registrar diversas observações, como a produção de uma fábrica em cada mês, o número de telefonemas que você dá por dia, a taxa de inflação mensal etc. No exemplo que mostramos, da variação do dólar, não teríamos como saber, antecipadamente, por exemplo, a sua cotação no 15º dia útil, ou no 20º dia útil, já que a seqüência é variável e depende de diversos fatores não previsíveis.

Em nosso curso vamos estudar umas seqüências muito especiais. Por sua regularidade, conhecendo alguns termos, podemos calcular qualquer outro. A primeira delas chama-se Progressão Aritmética.

Uma progressão aritmética é uma seqüência na qual, dado um primeiro termo, obtemos todos os outros acrescentando sempre a mesma quantidade. Por exemplo, vamos partir do número 7 e acrescentar 3, diversas vezes:

7 10 13 16 19 22 ...
+3 +3 +3 +3 +3

O valor que acrescentamos a cada termo para obter o seguinte chama-se razão (R). Portanto, nesse exemplo, temos: $\mathbf{a_1} = 7$ e R = 3.

Veja agora outros exemplos de progressões aritméticas e suas classificações:

- 3, 7, 11, 15, 19, 23 ...

Temos R = 4. Uma progressão crescente.

- 9, 7, 5, 3, 1, - 1, - 3, - 5, ...

Temos R = - 2. Uma progressão decrescente.

Você já deve ter percebido que é muito fácil sabermos o valor da razão de uma progressão aritmética. Como a razão é a quantidade que acrescentamos a cada termo para obter o seguinte, podemos dizer que: **A razão de uma progressão aritmética é a diferença entre qualquer termo e o anterior, a partir do segundo termo.**

Assim, retomando aos dois exemplos anteriores, temos:

na 1ª. progressão:

R = 7 - 3 = 4
R = 11 -7 = 4
R = 15 - 11 = 4 etc.

na 2ª. progressão:

R = 7 - 9 = - 2
R = 5 - 7 = - 2 etc.

2.2) FÓRMULA DO TERMO GERAL DE UMA P.A

Passemos então a generalizar o que vimos nos exemplos. Considere a seguinte progressão aritmética (de agora em diante representada por PA) de razão R:

$\mathbf{a_1}$ $\mathbf{a_2}$ $\mathbf{a_3}$ $\mathbf{a_4}$ $\mathbf{a_5}$ $\mathbf{a_6}$ .... an
+R + R + R + R + R + R ....

Suponha que você conhece o primeiro termo ($\mathbf{a_1}$), e a razão (R). Como faremos para calcular qualquer outro termo? Observe as igualdades:

$\mathbf{a_2} = \mathbf{a_1} + R$
$\mathbf{a_3} = \mathbf{a_1} + 2R$
$\mathbf{a_4} = \mathbf{a_1} + 3R$
$\mathbf{a_5} = \mathbf{a_1} + 4R$
....
$a_{10} = a_1 + 9R$

Vemos então que, para calcular um termo qualquer ($\mathbf{a_n}$) é preciso somar ao 1º termo, (n -1) vezes a razão, ou seja:

Fórmula do termo geral: $\Longrightarrow$ $\boxed{\mathbf{a_n = a_1 + (n - 1).R}}$

Para entender bem o que estamos fazendo, imagine que você está no 1º degrau de uma escada e deseja chegar ao 10º. Quantos degraus deve subir? É claro que são 9.
Se você está no 1º degrau e deseja chegar ao 25º, quantos deve subir? Deve subir 24, lógico. Então, para chegar ao degrau número n, devemos subir (n -1) degraus.

Observe a aplicação dessa fórmula nos exemplos seguintes.

EXEMPLO 1: Escreva a P.A obtida, quando inserimos 5 números entre 1 e 25?
Nesse caso, estamos querendo formar uma P.A, com sete termos, sendo que os extremos são os números 1 e 25. Esse tipo de problema é o que chamamos de **INTERPOLAÇÃO ARITMÉTICA.** É claro que o que falta obter é a razão desta P.A.
(1, __, __, __, __, __, 25).

$\mathbf{a_n} = \mathbf{a_1} + (n - 1).R$ ou
$\mathbf{a_7} = \mathbf{a_1} + 6.R$ ou $25 = 1 + 6.R$ ou ainda $24 = 6.R$, o que acarreta R = 4. Logo, a P.A procurada é:
(**1**, 5, 9, 13, 17, 21, **25**)

EXEMPLO 2:
Em janeiro, de certo ano, Lídia estava ganhando R$ 270,00 por mês. Seu patrão prometeu aumentar seu salário em R$ 8,00 todos os meses. Quanto Lídia estará ganhando em dezembro do ano seguinte?

Solução: Se o salário de Lídia aumenta R$ 8,00 todos os meses, então a seqüência dos salários é uma progressão aritmética de razão igual a 8.

Vamos Montar uma tabela, para melhor entender a situação:

janeiro _ $\mathbf{a_1}$ = 270,00
fevereiro _ $\mathbf{a_2}$ = 278,00
....
....
dezembro _ $\mathbf{a_{12}}$ =
janeiro _ $\mathbf{a_{13}}$ =
....
dezembro _ $\mathbf{a_{24}}$ = ?

Logo, o que queremos é o valor do 24º termo dessa P.A. Usando a fórmula do termo geral, teremos:

$\mathbf{a_{24}} = \mathbf{a_1} + 23.R$
$\mathbf{a_{24}} = 270 + 23.8$
$\mathbf{a_{24}} = 270 + 184$
$a_{24} = 454$

Portanto, com esses pequenos aumentos mensais, Lídia estará ganhando, em dezembro do ano seguinte, **R$ 454,00.**

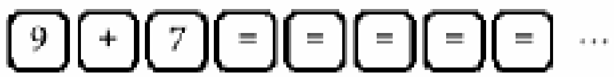
Uma outra maneira (Recorrência)

Imagine que você se encontra no 3º andar de uma escada e que deseja atingir o 9º andar. Quantos andares você terá de subir? É claro que a resposta é 6 andares. Isso, em linguagem matemática pode ser representado por: $\mathbf{a_9} = \mathbf{a_3} + 6 . R$.
De modo geral, se estamos no degrau de número n e desejamos chegar ao degrau de número m, devemos subir (m – n) degraus. No caso da P. A, teremos uma outra maneira mais geral de escrever a fórmula, relacionando dois termos quaisquer e não obrigatoriamente como primeiro termos. Ë a seguinte fórmula: $\mathbf{a_m = a_n + (m - n) . R}$.

2.3) PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E CALCULADORAS SIMPLES

Hoje em dia, todos nós usamos uma máquina simples para facilitar nossos cálculos: a máquina de calcular. Além de realizar as quatro operações (soma, subtração, multiplicação e divisão), a máquina calcula raiz quadrada e tem memória. Vamos ver uma forma interessante e simples de usar a calculadora para facilitar o trabalho com progressões aritméticas.

Como exemplo, vamos considerar a progressão aritmética de razão R = 7, começando em $a_1 = 9$. Para visualizar quantos termos você quiser, digite:



A primeira vez que você acionar a tecla = a máquina vai mostrar o termo 16 (segundo termo da P.A). Nas outras vezes que você acionar a tecla =, sucessivamente, o visor da máquina mostrará: 23, 30, 37, 44, ...até o termo que você desejar.

A máquina de calcular também soma os termos de uma progressão aritmética. Se não forem muitos os termos que precisamos somar, o uso da calculadora é bastante eficiente. Vamos mostrar, como exemplo, como obter a soma dos 5 primeiros termos de uma PA, cujo primeiro termo é 15,86 e cuja razão é 0,17.
Para obter os 5 termos, procedemos como no exemplo anterior. Devemos apenas, após cada termo que aparecer no visor, apertar a tecla M+ . Isto faz com que os termos da progressão sejam acumulados na memória da calculadora.
Depois que você apertar pela quinta vez a tecla M+ , aperte a tecla MR e a soma dos 5 termos da progressão aparecer· no visor.
O esquema da operação que vamos fazer é o seguinte:

[a_1] [M+] [+] [R] [=] [M+] [=] [M+] [=] [M+] [=] [M+] [MR]

Iniciando por 15,86 e usando a razão 0,17, você irá obter o valor 81 para soma dos 5 primeiros termos da progressão.

Atividades como a descrita acima podem (e devem) ser desenvolvidas já nas classes do Ensino Fundamental. Dessa forma, estaremos ajudando a nossos alunos a desenvolverem os primeiros conceitos sobre progressões aritmética, bem como a desenvolverem o uso de calculadoras.

2.4) JUROS SIMPLES E PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Muitas vezes, em nossas aulas de matemática, ensinamos aos alunos do ensino médio o que são progressões, mostramos as fórmulas, resolvemos exercícios de aplicação e, normalmente, não aproveitamos a oportunidade para trabalhar o conceito de juro, bem como suas aplicações em situações de empréstimos ou investimentos. As reformas curriculares, os parâmetros curriculares nacionais, enfatizam que devemos procurar relacionar os conteúdos ministrados com o dia-a-dia das pessoas. Esta é uma excelente oportunidade para nós, professores de Matemática.

Crescimento em PA (Juros Simples)

Os juros simples se caracterizam pelo fato de que o valor que é acrescido ao valor inicial a cada período é sempre constante e determinado por $i \cdot C_0$. Dessa forma, fica caracterizada na seqüência dos montantes obtidos, uma Progressão Aritmética, de razão igual a $i \cdot C_0$.
Temos que **i** é a taxa unitária de juros simples (ou taxa de crescimento aritmético). Ou seja, ao final de **n** períodos, teremos um acréscimo de $C_0.ni$. Sendo assim, o montante final de uma aplicação a juros simples, pode ser representado por:

$$M = C_0 + C_0.ni = C_0.(1 + ni)$$

Vejamos alguns exemplos:
1) Qual o montante final de uma aplicação de R$ 5000,00, a juros simples contratados à 1,5% ao mês, por 10 meses?

Solução:
$i = 0,015$
$n = 10$
$C_0 = 5000$

M = 5000 . (1 + 0,015 x 10) = 5000 x 1,15 = 5750 reais.

Comentário: Como se trata de juros simples, poderíamos ter calculado o ganho fixo mensal, que é igual a 0,015 x 5000 = 75 reais, e multiplicar esse ganho pelo número de meses (10 x 75 = 750 reais de juros). Logo, teríamos que o montante será igual a 5000 + 750 = 5750 reais.

Devemos incentivar a nossos alunos novas descobertas, para que eles não se sintam presos ao uso de fórmulas, poderíamos inclusive, mostrar, após as suas tentativas que o que ocorreu nada mais foi que um acréscimo de 15% (1,5% x 10) aos 5000 reais iniciais. Isso corresponde a multiplicar 5000 por 1,15. O valor 1,15 é denominado ***fator de aumento ou fator de correção*** *para 15%.*

Questões semelhantes à que mostramos acima podem (e devem) ser desenvolvidas desde a 5ª série do Ensino Fundamental, no momento em que nossos alunos trabalham com cálculos de números racionais na sua forma decimal.

2) Qual a taxa mensal de juros simples que, em uma aplicação por 8 meses, elevou um capital de R$ 3 000,00 para R$ 3 780,00?

Solução:

3000 x (1 + 8i) = 3780
1 + 8i = 3780 : 3000 = 1,26
8i = 0,26 ou i = 0,26 : 8 = 0,0325 ou ainda 3,25% ao mês.

Novamente seria conveniente mostrar a nossos alunos (caso não percebessem sozinhos) que o que foi feito nada mais foi do que se obter o fator de correção correspondente a um aumento de 3000 para 3780 reais, ou seja, 3780 : 3000 que é igual a 1,26. Esse fator corresponde a uma taxa de 26 % para os 8 meses da aplicação, logo, acarreta uma taxa de 3,25% ao mês.

3) Durante quanto tempo esteve aplicado, a juros simples, um capital de R$ 1200,00, para gerar um montante de R$ 1500,00, sob taxa fixa de 2,5% ao mês?

Solução:
O fator de correção foi 1500 : 1200 = 1,25. Tal fator corresponde a um acréscimo de 25% sobre o capital inicial do investimento. Como a taxa da aplicação (juros simples) é de 2,5% ao mês, teremos então que o número de meses foi 25 : 2,5 = 10 meses.

Caro colega aluno ou professor,

Reflita e tente responder:

1) Vocês conhecem no mercado financeiro brasileiro alguma aplicação que tenha o comportamento de juros simples?

2) Por que acham que os nossos livros da escola fundamental ou mesmo do ensino médio raramente mencionam os juros compostos, ficando com um enfoque superficial dos juros simples (que quase não estão presentes na vida dos brasileiros)?

3) PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS x JUROS COMPOSTOS

3.1) INTRODUÇÃO

Consideremos agora a seguinte situação: uma mercadoria, que em 2001 custava 100 reais, teve seu preço reajustado nos 4 anos seguintes, sob taxa de 10% ao ano, sobre o preço do ano anterior. Vejamos uma tabela representativa desses preços:

Ano	**Preço (R$)**
2001	100,00
2002	110,00
2003	121,00
2004	133,10
2005	146,41

Se você pegar sua calculadora e dividir os valores de dois termos consecutivos dessa seqüência, vai observar agora que os quocientes dessas divisões serão todos iguais. Vejamos:
110 : 100 = **1,10**   121 : 110 = **1,10**   133,10 : 121 = **1,10**   146,41 : 133,10 = **1,10**

Se lembrarmos que o número decimal 1,10 corresponde a 110/100 ou 110%, constataremos que cada preço está sendo reajustado em 10% sobre o preço do ano anterior.

Esse tipo de seqüências, onde cada termo (a partir do segundo) é obtido através da multiplicação do termo anterior por um fator fixo, denominado razão (q), é o que chamamos de Progressão Geométrica (PG) e que estudaremos nesse capítulo.

As progressões geométricas são fundamentais para cálculos que envolvem matemática comercial e financeira e o valor do dinheiro no tempo. Financiamentos e investimentos com parcelas periódicas fixas (prestações ou depósitos) têm os cálculos de todos os seus elementos obtidos através das progressões geométricas. Esses financiamentos e investimentos são denominados de Sistema Francês ou Price.

Valem para as progressões geométricas as mesmas notações e convenções que usamos para as progressões aritméticas: a_1 para o primeiro termo; a_n para o termo geral...etc. A única diferença de notação que usaremos é que, neste caso, denotaremos a razão por **q,** pois a razão agora é obtida pela divisão de dois termos consecutivos da seqüência, e, você sabe que o resultado de uma divisão é denominado **q**uociente.

Vejamos um exemplo inicial, para fixarmos o que já mostramos. Imagine uma progressão geométrica, de razão igual a 2, começando no número 3.

Perceba que, se fosse uma progressão aritmética, de razão igual a 2, começando no três, o crescimento seria bem mais lento:

Você pode perceber, claramente, a mensagem que existe em frases do tipo: ***"A produção de alimentos cresce em progressão aritmética, enquanto a população mundial cresce em progressão geométrica",*** *que traduz a teoria de Malthus sobre crescimento demográfico.*

O sociólogo e economista inglês Thomas Malthus é o primeiro a teorizar sobre o desequilíbrio ambiental. No livro *Ensaio sobre o princípio da população*, de 1798, estabelece uma relação entre o crescimento populacional e o de alimentos, conhecida como lei de Malthus: enquanto a produção de alimentos cresce em escala aritmética, a população cresce em escala geométrica. Malthus prevê que chegará o momento em que o contingente populacional será superior à capacidade do planeta de alimentá-lo. Mais tarde, os avanços tecnológicos aplicados à agricultura permitem relativizar o rigor da visão malthusiana. Na atualidade, porém, suas idéias são retomadas com um outro sentido: o crescimento da população mundial aumenta a pressão sobre o meio ambiente e pode tornar inviável a vida no planeta.

Podemos então resumir que uma P.G é uma seqüência onde cada termo, a partir do segundo, é obtido pelo produto do termo anterior por um fator fixo, denominado razão.

Podemos ainda afirmar que: A razão da PG é igual a qualquer termo dividido pelo anterior.

Em nosso estudo, por motivos práticos, nos deteremos nas progressões geométricas de razões positivas (que é o que ocorre na grande maioria dos exemplos práticos) e, podemos usar a seguinte classificação para as P.G.

- $a_1 = 2$ e $q = 5$, teremos a PG: 2, 10, 50, 250, ...que é uma progressão crescente.
- $a_1 = 8$ e $q = ½$, teremos a PG: 8, 4, 2, 1, ½, ... que é uma progressão decrescente.

Ou seja, se a razão é superior a 1, a progressão geométrica é **crescente**, se a razão é inferior a 1 (e positiva, como já combinamos), a progressão geométrica é **decrescente**.

OBS: É claro que existem progressões geométricas, normalmente teóricas, cuja razão é negativa. Essas progressões, pelo fato de ter razão negativa, terão seus termos variando de sinal e são ditas oscilantes.

3.2) FÓRMULA DO TERMO GERAL DE UMA P.G

Vamos usar um raciocínio semelhante ao que vimos para as progressões aritméticas.

A partir da definição de PG, temos que $a_2 = a_1 \cdot q$.
O terceiro termo é $a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$. O quarto termo é $a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \cdot q = a_1 \cdot q^3$ e assim por diante.

$$a_2 = a_1 \cdot q$$
$$a_3 = a_1 \cdot q^2$$
$$a_4 = a_1 \cdot q^3$$
$$a_5 = a_1 \cdot q^4$$
....

Podemos, dessa forma, inferir que a fórmula para o cálculo de um termo qualquer de uma P.G é:

$$a_n = a_1.q^{(n-1)}$$

FATO CURIOSO: Se você comparar as definições dos dois tipos de progressões que estamos estudando (aritméticas e geométricas), observará que o que na P.A é uma soma, na P.G se transforma em uma multiplicação. O que na P.A é uma multiplicação (ou soma de parcelas iguais), na P.G é uma potenciação (ou multiplicação de fatores iguais). Se lembrar também que a razão da P.A é indicada por R, enquanto que a da P.G é indicada por q, terá um poderoso artifício para transformar as propriedades e fórmulas obtidas para a P.A, para as propriedades e fórmulas da P.G.

Comparemos as fórmulas dos termos gerais, da P.A e da P.G:

P.A $\longrightarrow$ $a_n = a_1 + R. (n - 1)$

P.G $\longrightarrow$ $a_n = a_1.q^{(n-1)}$

Verifique, a fórmula da P.A se transforma na da P.G, bastando substituir a soma por produto, a razão R, por q e o produto por uma potência.

Mas, mesmo sabendo essas fórmulas, é muito mais importante do que elas saber que, como numa escada, quantos "saltos" devemos dar para ir de um termo ao outro. Somando sempre um valor fixo, no caso da P.A e multiplicando sempre um valor fixo, no caso da P.G.

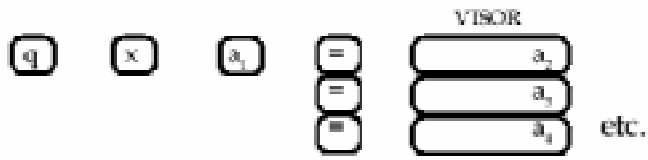
Cabe ainda ressaltar que, a fórmula da P.G pode ser escrita a partir de um termo inicial que denotaremos por $\mathbf{a_0}$ o que se mostrará bastante vantajoso em diversos exemplos práticos que mostraremos, como na biologia e na matemática financeira. Nesses casos, a fórmula assumirá o seguinte aspecto:

$$a_n = a_0.q^n$$

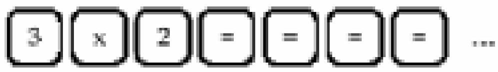
3.3) CALCULADORAS E PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

A maioria das calculadoras simples é capaz de mostrar no visor os termos de uma progressão geométrica de forma bastante prática. Basta digitar a razão, o sinal de multiplicação, o primeiro termo e a tecla = sucessivas vezes.

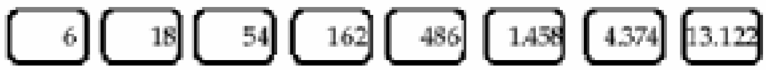
Os termos da PG vão aparecendo no visor:



Por exemplo, para obter diversos termos da PG de razão 3 com primeiro termo 2, digite, nesta ordem:



Você verá então os seguintes números aparecerem no visor:



Exemplo 1:
Sr. Gastão aplicou R$ 1000,00 num investimento que valorizava o seu dinheiro 2% ao mês. Quanto ele vai ter, 4 meses após o início da aplicação?

Solução:
Esse tipo de situação, da Matemática Comercial e Financeira, é o que denominamos **JUROS COMPOSTOS ou JUROS SOBRE JUROS** formará sempre uma Progressão Geométrica, como vimos no exemplo da introdução, a razão dessa P.G é o que denominamos **FATOR DE CORREÇÃO**. Nesse exemplo, o fator de correção será igual a 1,02, pois 100% + 2% corresponde a 102% ou 1,02. Logo, teremos de calcular o resultado de 1000 . $(1,02)^4$. Na calculadora simples, que não possui a tecla da potenciação, basta fazer 1,02 x 1000 = = = = **1082,43.**

O que vimos no exemplo acima é um dos grandes usos das progressões em nossa vida – a Matemática do Dinheiro. As progressões geométricas podem (e devem) ser observadas como seqüências de termos com taxa de variação constante (seja para aumento ou para redução).

Assim sendo, podemos dizer que todas as questões de juros compostos, submetidos a uma taxa fixa i, podem ser resolvidas através da fórmula:

$$M = C\,.\,F^n$$

M representa o montante final, C representa o capital inicial e F representa o fator de aumento correspondente à taxa fixa i, ou seja, F = 1 + i.

Cabe ainda lembrar que os montantes de um crescimento a juros compostos variam exponencialmente e teremos também excelentes oportunidades de relacionar a PG com funções exponenciais e cálculo de logaritmos, temas importantes no Ensino Médio.

3.3) SOMA DOS TERMOS DE UMA PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Seja $S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$

Vamos multiplicar todos os termos dessa igualdade por q. Teremos então:

$$q.S = a_1.q + a_2.q + a_3.q + ... + a_{n-2}.q + a_{n-1}.q + a_n.q$$

$$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \quad \Downarrow \quad \Downarrow$$

$$\mathbf{a_2} \quad \mathbf{a_3} \quad \mathbf{a_4} \quad \quad \mathbf{a_{n-1}} \quad \mathbf{a_n}$$

Subtraindo a primeira expressão da segunda, teremos:

$q.S – S = a_n . q - a_1$ e agora, colocando o termo S, em evidência, teremos:

$S. (q – 1) = a_n . q - a_1$, logo, $\mathbf{S} = \dfrac{a_n.q - a_1}{q-1}$

A fórmula acima pode assumir um outro aspecto, bastando substituir o a_n pela respectiva expressão do termo geral da P.G. A fórmula da soma dos termos da P.G (finita) ficará então:

$$\mathbf{S} = a_1.\frac{(q^n - 1)}{(q-1)}$$

Portanto, temos duas expressões distintas para o cálculo da soma dos termos de uma P.G finita. A escolha de qual usar em cada situação problema dependerá obviamente dos parâmetros envolvidos em cada caso. Essa fórmula será muito importante para o cálculo de todas as parcelas envolvidas num financiamento pelo Sistema Price.

Exemplo 2:
Obtenha a soma dos 10 primeiros termos da P.G (2, 4, 8, ...)

Solução:
Para este caso, é melhor usarmos a segunda expressão da fórmula da soma da P.G, pois temos o primeiro termo, o número de termos que queremos somar e a razão (q = 2).

$$\mathbf{S} = a_1.\frac{(q^n - 1)}{(q-1)} = 2.\frac{(2^{10} - 1)}{(2-1)} = 2.(1024 - 1) = 2046$$

3.4) JUROS COMPOSTOS E FATORES DE CORREÇÃO X PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS – QUESTÕES COMENTADAS

1) (Escola Naval)
   Ações de certa companhia valorizaram-se 10% ao mês, durante cinco meses consecutivos. Quem investiu nessas ações obteve, durante esses cinco meses, um lucro aproximado igual a:

SOLUÇÃO:

Pelo que já mostramos anteriormente, um crescimento sob taxa constante de 10% gera montantes em Progressão geométrica cuja razão é o fator de aumento, que nesse caso será 1,1. Assim se as ações cresceram, consecutivamente, durante 5 meses, sob taxa fixa de 10% ao mês, tivemos, representando o valor inicial da ação por A, um valor final igual a $A.(1,1)^5 \cong A.1,6105$. O Resultado obtido nos informa que tal ação teve um acréscimo aproximado de 61,05%.

2) Qual a taxa fixa de uma aplicação financeira, sob juros compostos, que eleva um investimento de R$ 1200,00 para R$ 1608,11, em 6 meses?

SOLUÇÃO:

$1200 \cdot F^6 = 1608{,}11$

$F^6 = \dfrac{1608{,}11}{1200} \cong 1{,}34$

Assim, $F \cong \sqrt[6]{1{,}34} \cong 1{,}05$

Como obtivemos um fator de correção igual a 1,05, concluímos que a taxa da operação financeira foi de 5% ao mês.

4) MATEMÁTICA FINANCEIRA E LOGARÍTMOS

Um outro excelente momento de abordarmos a Matemática Financeira nas classes do Ensino Médio é quando estivermos ensinando os logaritmos. Em todas as questões cuja incógnita for o tempo de realização de um fenômeno que cresce ou decresce sob taxa constante, recairemos em equações exponenciais, normalmente com bases diferentes. É nesse momento que precisaremos de aplicar os logaritmos.

DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES BÁSICAS DOS LOGARITMOS

$$\text{A) } b^x = a \Leftrightarrow \log_b a = x$$

$$\text{B) } \log_K (a.b.c\ldots) = \log_K a + \log_K b + \log_K c + \ldots$$

$$\text{C) } \log_K (a : b) = \log_K a - \log_K b$$

$$\text{D) } \log_K a^n = n.\log_K a$$

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO:

1) Apliquei R$ 1800,00 a juros compostos de 3% ao mês. Depois de um certo tempo acumulei um montante de R$ 2213,77. Qual foi o prazo necessário para que tal fato ocorresse? (Informação: $\log 1{,}03 \cong 0{,}0128$ e $\log 1{,}23 \cong 0{,}0899$)

SOLUÇÃO:

$1800 \cdot (1{,}03)^n = 2213{,}77$

$(1{,}03)^n = 2213{,}77 : 1800$

$(1{,}03)^n \cong 1{,}23$

Aplicando logaritmos decimais e depois a propriedade D, teremos:

$\log (1{,}03)^n \cong \log 1{,}23$

$n \cdot \log (1{,}03) \cong \log 1{,}23$, logo,

$n = \dfrac{\log 1{,}23}{\log 1{,}03} \cong \dfrac{0{,}0899}{0{,}0128} \cong 7$ meses

2) Uma bomba de vácuo retira cerca de 2% do ar contido num recipiente em cada “bombada” que é dada. Quantas “bombadas” (aproximadamente) serão necessárias para que o ar contido no

recipiente fique reduzido a apenas 20% do volume inicial? (Informação: log 0,2 ≅ – 0,699 e log 0,98 ≅ – 0,0098).

SOLUÇÃO:

Podemos considerar que o volume inicial do recipiente seja, por exemplo, 100 litros e que ficará reduzido a 20 litros (20% do volume inicial). Como em cada "bombada" há uma redução de 2% do volume anterior, teremos que o fator de multiplicação (redução) para essa questão é 0,98 (100% - 2%). Logo,

$100 \,.\, (0{,}98)^n = 20$

$(0{,}98)^n = \dfrac{20}{100} = 0{,}2$

Aplicando logaritmos, na base 10, teremos:

$n \,.\, \log 0{,}98 = \log 0{,}2$

$$n = \frac{\log 0{,}2}{\log 0{,}98} = \frac{-0{,}699}{-0{,}0098} \cong 71{,}33$$

Logo, como não podemos definir "fração de bombada", serão necessárias, aproximadamente, 71 "bombadas" na bomba de vácuo.

3) Quanto tempo levará um capital qualquer, aplicado a juros mensais e sob taxa de 4%, para dobrar de valor, considerando que a aplicação foi a juros compostos (Informação: log 2 ≅ 0,301 e log 1,04 ≅ 0,017)

SOLUÇÃO:

Podemos considerar o capital inicial igual a 1 e o montante final igual a 2, ou C e 2C, tanto faz, já que sempre recairemos na mesma equação, após as simplificações adequadas.

Logo,

$1 \,.\, (1{,}04)^n = 2$

Aplicando logaritmos decimais, teremos:

$\log (1{,}04)^n = \log 2$ ou,

$n \,.\, \log (1{,}04) = \log 2$

$$n = \frac{\log 2}{\log 1{,}04} = \frac{0{,}301}{0{,}017} \cong 17{,}7 \text{ meses}$$

É claro que numa classe do Ensino Médio, se os alunos estiverem autorizados e habituados a utilizarem as calculadoras científicas (o que deveria sempre ocorrer), os valores dos logaritmos não precisariam ser dados como informação e os alunos os procurariam, conforme a necessidade, diretamente nas máquinas de calcular.