UNIVERSIDADE SEVERINO SOMBRA
UNIDADE MARICÁ
CURSO DE ADMINISTRAÇÃO DE EMPRESAS

MATEMÁTICA 2 – PROF. ILYDIO PEREIRA DE SÁ

ESTUDO DAS DERIVADAS (CONCEITO E APLICAÇÕES)

No presente capítulo, estudaremos as noções básicas sobre derivadas de funções e algumas de suas aplicações nas áreas da Economia e Administração. A noção de derivada é uma das mais importantes e poderosas ferramentas da Matemática.

Para um bom entendimento sobre derivadas necessitamos do conceito de taxa de variação média e também o de taxa de variação instantânea. São dois conceitos simples, importantes e fundamentais para o entendimento das derivadas.

1) TAXA DE VARIAÇÃO MÉDIA

Vejamos um exemplo inicial:

Considere a função $f(x) = x^2$, que define a produção (em toneladas) de uma Empresa X, em função do número de horas trabalhadas (x). Vamos supor que o início do expediente, que é representado por x = 0, foi 0:00 horas. Podemos verificar que a produção cresce, proporcionalmente, com o quadrado do número de horas trabalhadas, isto é, um intervalo de uma hora, entre 2 h e 3 h, por exemplo, vai gerar uma produção menor que um intervalo de uma hora, entre 5 h e 6 h. Veja isso:

a) Produção da Empresa até as 2 horas → $f(2) – f(0) = 2^2 - 0^2 = 4$ toneladas.
b) Produção da Empresa até as 3 horas → $f(3) – f(0) = 3^2 - 0^2 = 9$ toneladas.
   Aqui verificamos um aumento de produção de 5 toneladas (9 – 4), em 1 hora, no intervalo de 2 horas às 3 horas.
c) Produção da Empresa até as 5 horas → $f(5) – f(0) = 5^2 - 0^2 = 25$ toneladas.
d) Produção da Empresa até as 6 horas → $f(6) – f(0) = 6^2 - 0^2 = 36$ toneladas.
   Aqui verificamos um aumento de produção de 11 toneladas (36 – 25), em 1 hora, no intervalo de 5 horas às 6 horas.

O que o exemplo nos mostra? Que, mesmo sendo um intervalo igual (de 1 hora), a variação da produção não foi a mesma. Em linguagem matemática, dizemos que a taxa de variação média da produção, das 2 às 3 horas foi de **5 ton/h** e que a taxa de variação média da produção, das 5 às 6 horas foi de **11 ton/h**.

Definição:
Dizemos que a taxa de variação média de uma função y = f(x), no intervalo de **a** até **b** (x variando de a até b) é a razão definida por:

$$TV_{a \to b} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Esta razão apresentada tem uma representação específica na matemática, que é:

$$TV_{a \to b} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Vejamos um segundo exemplo:

Considere a função $f(x) = 2^x + 1$. Determine a taxa de variação desta função no intervalo [2, 5].

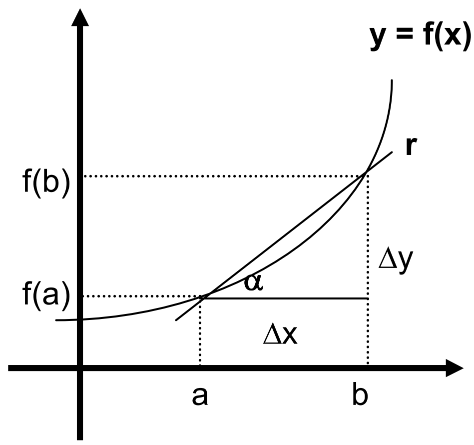
Solução:

$$TV_{a \to b} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{2^5 + 1 - (2^2 + 1)}{3} = \frac{33 - 5}{3} = \frac{28}{3} \cong 9{,}33$$

Uma possível interpretação: Supondo que a função acima estivesse representando uma população de bactérias (em milhares), em função do tempo (medido em segundos, após um instante inicial), teríamos que no intervalo de 2 a 5 segundos após o início da contagem, houve um acréscimo médio de 9,33 milhares de bactérias por segundo. É isso que representa a denominada taxa de variação média, entre dois pontos de uma função.

Interpretação Geométrica da Taxa de Variação entre dois pontos

Vamos imaginar que o gráfico da função y = f(x) seja o representado abaixo. Marcaremos nesse gráfico os pontos do domínio **a** e **b,** com os respectivos valores da função (imagem) **f(b)** e **f(a).**



A taxa de variação média no intervalo [a, b] é numericamente igual ao coeficiente angular da reta **r** que passa nos pontos do gráfico, cujas abscissas são os valores **a** e **b**.

$$TV_{a \to b} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha$$

Observe que, quando a função é do tipo crescente, a taxa de variação média entre dois pontos será sempre POSITIVA. Verifique também que, caso a função fosse decrescente entre esses pontos, a taxa de variação seria NEGATIVA. O que será que ocorreria se a função fosse constante entre esses pontos?

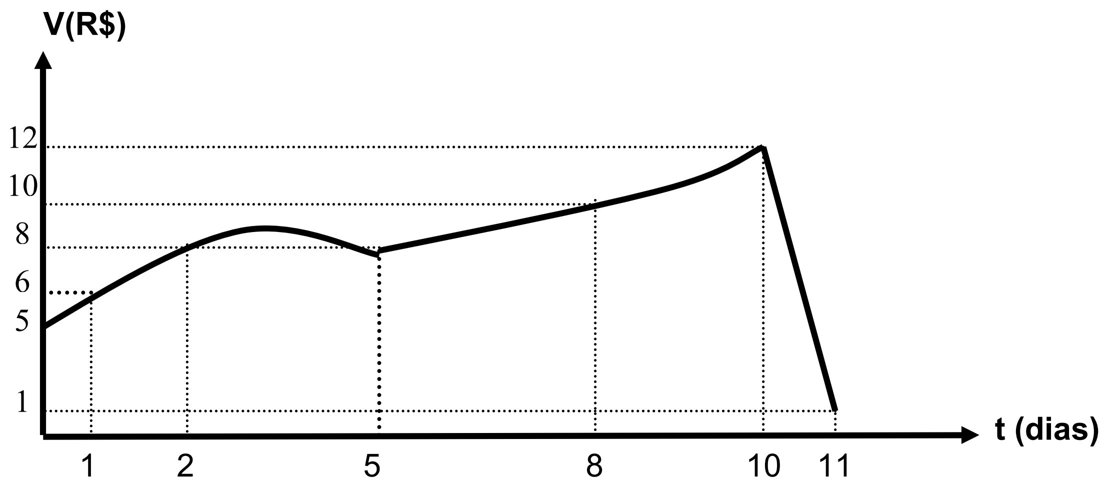
ALGUNS EXERCÍCIOS SOBRE TAXA DE VARIAÇÃO MÉDIA

1) Na comercialização de um componente químico líquido, utilizado na fabricação de sabão e detergente, a receita **R** (em R$) para a venda de certa quantidade **x** (em litros) é dada por **$R = 5x^2$.**
a) Determine a taxa de variação média da receita para o intervalo [4, 6].
b) Determine a taxa de variação média da receita para o intervalo [6, 8]

2) Em uma indústria química, considerou-se a produção P (em milhares de litros) de um detergente como função do capital x (em milhares de reais) investido em equipamentos e estabeleceu-se a seguinte relação: **$P = 3x^2$.**
a) Determine a taxa de variação média da produção para o intervalo $3 \leq x \leq 5$.
b) Determine a taxa de variação média da produção para o intervalo $6 \leq x \leq 10$.
c) Qual a equação da reta secante à curva da função produção nos pontos de abscissas $x = 3$ e $x = 5$?
d) Qual a equação da reta secante à curva da função produção nos pontos de abscissas $x = 6$ e $x = 10$?

3) O custo C (em reais) para beneficiar uma quantidade q de trigo (em toneladas) é dado por $C = q^2 + 400$.
a) Determine a taxa de variação média do custo para o intervalo $1 \leq q \leq 5$.
b) Qual a equação da reta secante à curva da função custo nos pontos de abscissas $q = 1$ e $q = 5$?

4) Uma ação é negociada na bolsa de valores e seu valor V (em reais) é dado de acordo com o número t de dias de “pregão” transcorridos após a data em que a ação começou a ser negociada (t = 0). O gráfico a seguir mostra alguns desses valores, em reais, de tal ação no decorrer do tempo.



a) Qual a taxa de variação do valor da ação para o intervalo $0 \leq t \leq 2$? E para o intervalo $5 \leq t \leq 10$? Para tais intervalos essa função é crescente ou decrescente? Compare as suas respostas com as taxas de variação encontradas.

b) Qual a taxa de variação do valor da ação para o intervalo $10 \leq t \leq 11$? Neste intervalo a função é crescente ou decrescente? Compare o resultado com a taxa de variação encontrada.

GABARITO

1) a) R$ 50,00 / litro b) R$ 70,00 / litro

2) a) 24 litros/ real b) 48 litros / real c) y = 24x – 45 d) y = 48x – 180

3) a) 6 reais / ton b) y = 6x + 395

4) a) R$ 1,50 / dia ; R$ 0,80 / dia ; crescente em ambos os intervalos. A taxa de variação deu resultado positivo em ambos os casos.

b) – R$11,00 / dia ; a função é decrescente. A taxa de variação deu resultado negativo.

2) TAXA DE VARIAÇÃO INSTANTÂNEA

A noção de taxa de variação instantânea está relacionada com a noção de limites de uma função, que estudamos anteriormente. No primeiro exemplo que fizemos neste capítulo encontramos uma taxa de variação média de produção, entre as 2 horas e as 3 horas, e encontramos 5 toneladas/h. E como poderíamos fazer para determinar a taxa de variação **EXATAMENTE** no instante t = 2 h. O que fazemos normalmente é aproximar os dois pontos (no caso instantes). Por exemplo, poderíamos considerar 2 h e 2:30 ou 2 h e 2:15 ou 2 h e 2:01 ou ainda 2 h e 2 h 5 s. Matematicamente estamos determinando o limite da taxa de variação média, quando o intervalo (Δx) tende a zero.

Geometricamente, como a distância entre os pontos está tendendo a zero, a reta que antes era secante à curva agora tende a tornar-se uma tangente à curva no ponto considerado.

Os dois pontos a e b que usamos na taxa de variação média podem ser representados por **a** e **b = a + h**. Como desejamos que **b** se "aproxime" de **a**, para o cálculo da taxa de variação no ponto a, calculamos o limite da taxa de variação média entre **a** e **a + h**, quando **h → 0**, ou seja:

Taxa de variação instantânea da função y = f(x) no ponto a: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Exemplo 1. Obtenha a taxa de variação da função **f(x) = 5x²** no ponto x = 2.

Solução: $f(2 + h) = 5.(2 + h)^2 = 5.(4 + 4h + h^2) = 20 + 20h + 5h^2$
$f(2) = 5.2^2 = 20$. Logo, a taxa de variação pedida, será:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{20 + 20h + 5h^2 - 20}{h} = \frac{20h + 5h^2}{h} = \frac{0}{0}$$

Recaímos numa forma indeterminada, mas, colocando o h em evidência, teremos:

$$\lim_{h \to 0} \frac{20h + 5h^2}{h} = \frac{h.(20 + h)}{h} = \lim_{h \to 0} 20 + h = 20.$$

Como você interpreta o resultado obtido?

*A taxa de variação instantânea é também denominada de **derivada da função f(x)** no ponto considerado.*

Notação: É usual representarmos a derivada de uma função y = f(x) num ponto a, por **f´(a).**

Exemplo 2: Obtenha a derivada da função $y = 3x^2 + 4x - 3$, no ponto x = 4.

Solução: Como já vimos anteriormente, a derivada de uma função em um determinado ponto é igual à taxa de variação instantânea nesse ponto. Aplicando a definição, teremos:

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} =$$

Calculando f(4 + h), teremos:

$f(4 + h) = 3 \,.\, (4 + h)^2 + 4.\ (4 + h) - 3 = 3.\ (16 + 8h + h^2) + 16 + 4h - 3 =$
$48 + 24h + 3h^2 + 16 + 4h - 3 = \mathbf{3h^2 + 28h + 61}$

Calculando f(4), teremos:

$f(4) = 3.\ 4^2 + 4.\ 4 - 3 =$ **61.** Logo, a derivada procurada será igual a:

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3h^2 + 28h + 61 - 61}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3h^2 + 28h}{h}$$

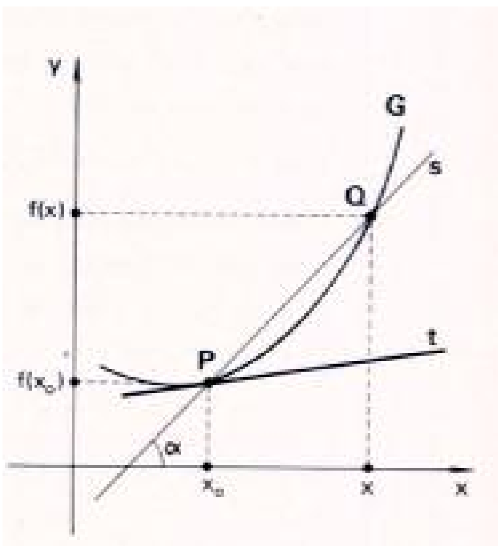
Como o limite se apresenta na forma indeterminada 0 / 0, teremos que “levantar” a indeterminação. Colocando o h em evidência, teremos:

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{3h^2 + 28h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h.(3h + 28)}{h} = 28$$

Interpretação Geométrica da Derivada de uma Função num Ponto Dado

Como a derivada é uma taxa de variação instantânea, a reta que era SECANTE à curva na taxa de variação média passa a ser TANGENTE à curva no ponto considerado pois, como h tende a zero, os dois pontos da secante tendem a tornar-se um único ponto da curva.

Assim, podemos dizer que o valor da derivada de uma função num ponto dado é igual ao coeficiente angular da reta tangente à curva nesse ponto.



ORIGEM DO CONCEITO DE DERIVADA DE UMA FUNÇÃO

O conceito de função que hoje pode parecer simples, é o resultado de uma lenta e longa evolução histórica iniciada na Antiguidade quando, por exemplo, os matemáticos Babilônios utilizaram tabelas de quadrados e de raízes quadradas e cúbicas ou quando os Pitagóricos tentaram relacionar a altura do som emitido por cordas submetidas à mesma tensão com o seu comprimento. Nesta época o conceito de função não estava claramente definido: as relações entre as variáveis surgiam de forma implícita e eram descritas verbalmente ou por um gráfico.

Só no séc. XVII, quando Descartes e Pierre Fermat introduziram as coordenadas cartesianas, se tornou possível transformar problemas geométricos em problemas algébricos e estudar analiticamente funções. A Matemática recebe assim um grande impulso, nomeadamente na sua aplicabilidade a outras ciências - os cientistas passam, a partir de observações ou experiências realizadas, a procurar determinar a fórmula ou função que relaciona as variáveis em estudo. A partir daqui todo o estudo se desenvolve em torno das propriedades de tais funções. Por outro lado, a introdução de coordenadas, além de facilitar o estudo de curvas já conhecidas permitiu a "criação" de novas curvas, imagens geométricas de funções definidas por relações entre variáveis.

Foi enquanto se dedicava ao estudo de algumas destas funções que Fermat deu conta das limitações do conceito clássico de reta tangente a uma curva como sendo aquela que encontrava a curva num único ponto. Tornou-se assim importante reformular tal conceito e encontrar um processo de traçar uma tangente a um gráfico num dado ponto - esta dificuldade ficou conhecida na História da Matemática como o " Problema da Tangente".

Fermat resolveu esta dificuldade de uma maneira muito simples: para determinar uma tangente a uma curva num ponto P considerou outro ponto Q sobre a curva; considerou a reta PQ secante à curva. Seguidamente fez deslizar Q ao longo da curva em direção a P, obtendo deste modo retas PQ que se aproximavam duma reta t a que Fermat chamou a reta tangente à curva no ponto P.

Fermat notou que para certas funções, nos pontos onde a curva assumia valores extremos, a tangente ao gráfico devia ser uma reta horizontal, já que ao comparar o valor assumido pela função num desses pontos $P(x, f(x))$ com o valor assumido no outro ponto $Q(x+h, f(x+h))$ próximo de P, a diferença entre $f(x+h)$ e $f(x)$ era muito pequena, quase nula, quando comparada com o valor de E, diferença das abscissas de Q e P. Assim, o problema de determinar extremos e de determinar tangentes a curvas passam a estar intimamente relacionados.

Estas idéias constituíram o embrião do conceito de **DERIVADA** e levou Laplace a considerar Fermat "o verdadeiro inventor do Cálculo Diferencial". Contudo, Fermat não dispunha de notação apropriada e o conceito de limite não estava ainda claramente definido.

No séc.XVII, Leibniz algebriza o Cálculo Infinitesimal, introduzindo os conceitos de variável, constante e parâmetro, bem como a notação dx e dy para designar "a menor possível das diferenças em x e em y. Desta notação surge o nome do ramo da Matemática conhecido hoje como " Cálculo Diferencial ".

Assim, embora só no século XIX Cauchy introduzia formalmente o conceito de limite e o conceito de derivada, a partir do séc. XVII, com Leibniz e Newton, o Cálculo Diferencial torna-se um instrumento cada vez mais indispensável pela sua aplicabilidade aos mais diversos campos da Ciência.

3) A FUNÇÃO DERIVADA

É muito trabalhoso ficarmos determinando as derivadas em cada ponto de uma função. O que fazemos normalmente é determinar uma expressão geral que permita o cálculo da derivada em qualquer pondo desejado (se ela existir, é claro). A expressão determinada é denominada de função derivada (f´(x)) e, para isso, podemos determinar fórmulas que facilitem a descoberta da função derivada, sem precisar recorrer ao limite que define a taxa de variação instantânea.

Vejamos um exemplo:

Qual a derivada da função **f(x) = 4 x^2**?

Solução:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Vejamos o valor de f(x + h) = 4 . $(x + h)^2$ = 4 . (x^2 + 2xh + h^2) = 4 x^2 + 8xh + 4h^2

Voltando ao limite, teremos:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4x^2 + 8xh + 4h^2 - 4x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{8xh + 4h^2}{h}$$

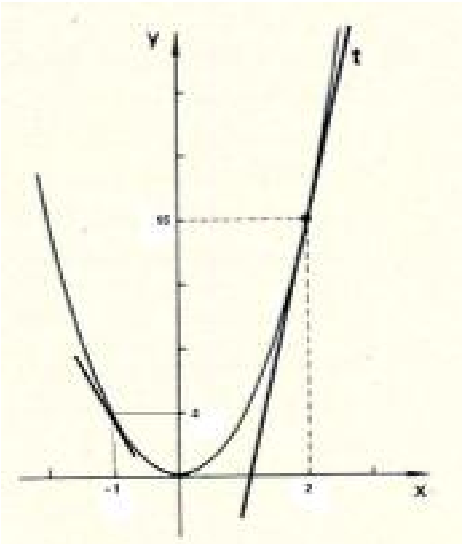
Mas, como se trata de uma forma indeterminada (0 / 0), vamos “levantar” a indeterminação, colocando a variável h em evidência.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{8xh + 4h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(8x + 4h)}{h} = 8x$$

Dessa forma, se desejarmos calcular a derivada da função dada (f(x) = 4 x^2) em qualquer ponto, basta calcular o valor numérico da função f´(x) = 8x, para esse pondo considerado.

A derivada da função f(x) = 4 x^2 no pondo de abscissa x = 2, será f´(x) = 8 . 2 = 16.

A derivada da função f(x) = 4 x^2 no pondo de abscissa x = -1, será f´(x) = 8 . (-1)= - 8.



Os resultados obtidos, como já vimos anteriormente, asseguram que o ponto x = 2 pertence a um intervalo onde a função dada ($f(x) = 4x^2$) é **CRESCENTE**, pelo fato da derivada nesse ponto ter dado um resultado positivo. Analogamente, o ponto x = -1 pertence a um intervalo onde a função é **DECRESCENTE**, pelo fato da derivada nesse ponto ter dado um resultado negativo.

Como você interpretaria o fato da função derivada, num determinado ponto, ter resultado igual a **ZERO**?

Algumas Fórmulas de Derivação

A função derivada, como iremos observar na seqüência de nosso estudo, tem diversas aplicações nas mais diversas áreas do conhecimento. Se tivéssemos que fazer todo esse cálculo que mostramos anteriormente, para determinar a função derivada, despenderíamos muito tempo e trabalho. Vamos aqui apresentar algumas fórmulas para a determinação de algumas funções derivadas. É óbvio que tais fórmulas foram obtidas a partir da definição que mostramos anteriormente.

FUNÇÃO	DERIVADA
Função Constante – $f(x) = C$	$f'(x) = 0$
Função Polinomial do 1º Grau – $f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
Função Potência – $f(x) = ax^n$	$f'(x) = n \, . \, ax^{n-1}$
Função Exponencial – $f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \, . \, La$
Soma de Funções – $f(x) + g(x)$	$f'(x) + f'(x)$
Produto de Funções – $f(x) \, . \, g(x)$	$f'(x) \, . \, g(x) + f(x) \, . \, g'(x)$
Quociente de Funções – $\frac{f(x)}{g(x)}$	$f'(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$

Exemplos:

Aplicando as fórmulas de derivação, encontre as derivadas das seguintes funções:

1) $f(x) = 3x + 8 \rightarrow f'(x) = 3$

2) $f(x) = 4x^3 \rightarrow f'(x) = 3 \cdot 4x^2 = 12x^2$

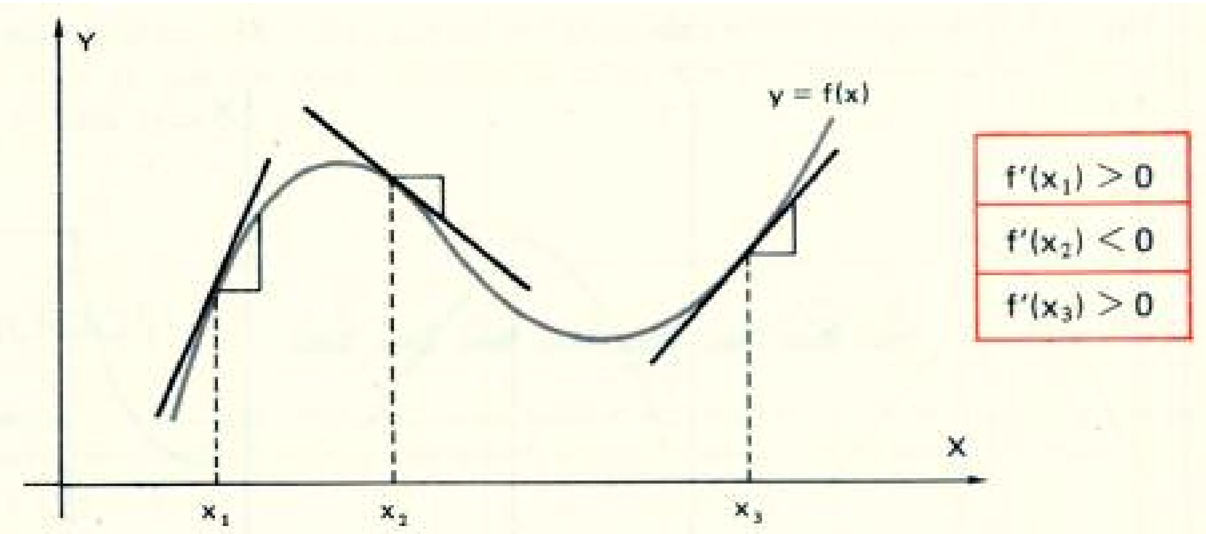
3) $f(x) = 3x^3 + 5x^2 - 3x + 8 \rightarrow f'(x) = 9x^2 + 10x - 3$

4) $f(x) = 4x^3 \cdot 3^x \rightarrow f'(x) = 12x^2 \cdot 3^x + 4x^3 \cdot 3^x \cdot L3$

Aplicações das Derivadas

Crescimento de uma Função / Máximos e Mínimos

Uma das grandes utilidades práticas das funções derivadas é permitir que possamos saber os intervalos do domínio onde uma função é crescente, decrescente ou mesmo constante. Pelo que mostramos nas taxas de variação, quando uma função for crescente, sua derivada será **POSITIVA** no intervalo, quando for decrescente, a derivada será **NEGATIVA**.



Exemplos:
1) Determine os intervalos para os quais a função real, definida por $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ é crescente.

Solução:
A função será crescente para os intervalos onde a sua derivada for POSITIVA. Vamos, em primeiro lugar, encontrar a função derivada.
$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$

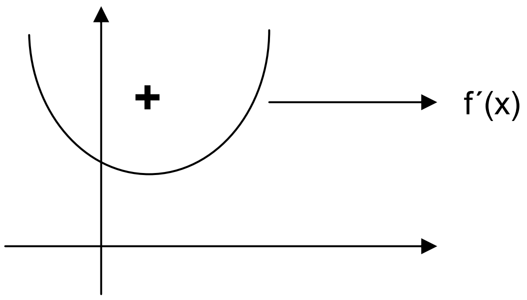
Vamos agora obter as raízes dessa função e um esboço de seu gráfico.

$3x^2 - 2x + 1 = 0$

Aplicando a fórmula de Bháskara, teremos:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4.3.1}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{6}$$

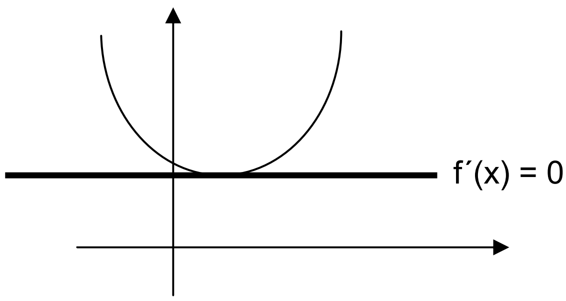
Verificamos que esta função não apresenta raízes reais, logo, o seu gráfico (parábola) não corta o eixo das abscissas. Vejamos um esboço.



Conclusão: Como a derivada da função dada é sempre positiva, podemos concluir que a função apresentada é sempre **CRESCENTE** (estritamente crescente).

2) Como se interpreta o fato da derivada de uma função ter derivada nula num determinado ponto?

Solução: Nesse ponto a reta tangente à curva será horizontal.



OBS: Esta informação será bastante útil adiante, quando estivermos pesquisando a existência de máximos ou mínimos para uma função qualquer. Uma condição necessária, mas não suficiente para que um ponto seja de máximo ou de mínimo é que a função derivada, nesse ponto, seja igual a zero, ou seja, que o ponto seja uma raiz da função derivada.

3) Determine os intervalos em que a função $f(x) = x^3 – 12x + 17$ é crescente e os intervalos em que é decrescente, em seguida faça um esboço de seu gráfico.

Solução:
Vamos primeiramente obter a função derivada:

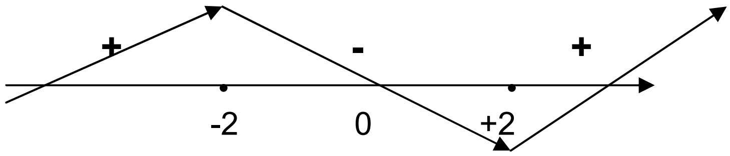
$f´(x) = 3x^2 – 12$

Em seguida, as raízes da função derivada:

$3x^2 – 12 = 0$ ou $x^2 = 4$ ou ainda $x = +2$ ou $x = -2$.

Sugerimos que se coloque as raízes obtidas numa reta e, nos intervalos obtidos, verifique-se (por substituição de valores) os sinais da função derivada.

$f'(x) = 3x^2 - 12$

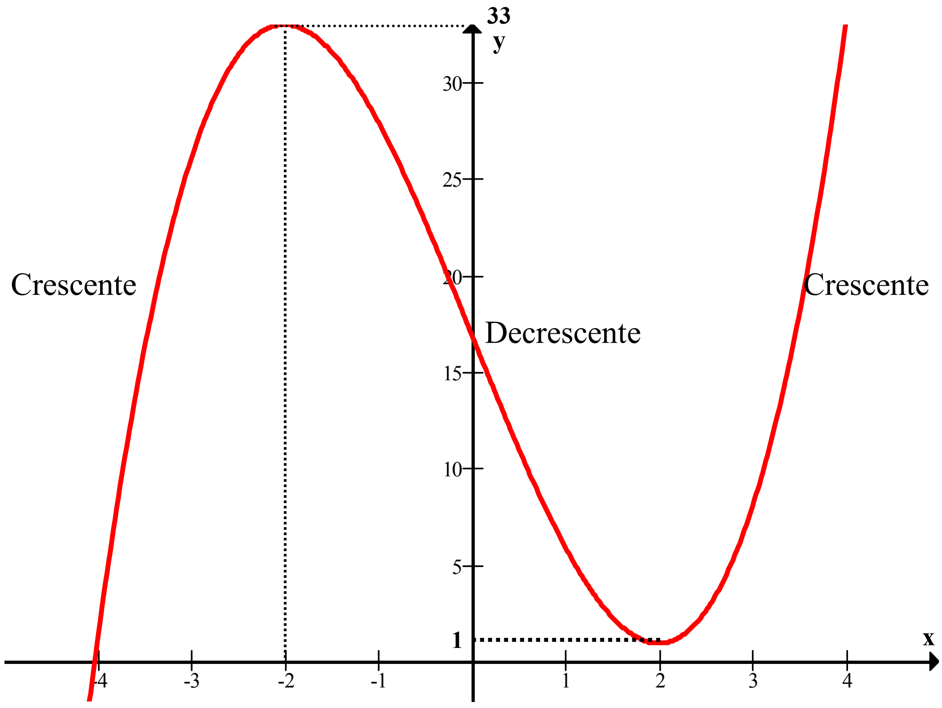


Verificamos que a função dada $f(x) = x^3 - 12x + 17$ será crescente nos intervalos $x < -2$ e $x > 2$ e será crescente no intervalo de -2 até 2. Nos pontos de abscissas -2 e 2, como são raízes da derivada e a função passa de crescente para decrescente (ou vice-versa), teremos pontos de máximo ou de mínimo local.

Vamos também calcular o valor da f(x) para x = -2 e para x = 2.

f(-2) = 33 (verifique)
f(2) = 1 (verifique)

O gráfico da função dada será:



Quais são os pontos extremos dessa função?

Resposta:
Ponto de Mínimo local: (2, 1)
Ponto de Máximo local: (-2, 33)

Exercícios Propostos:

1) Determine os intervalos em que a função $f(x) = x^3 - 27x + 60$ é crescente e os intervalos em que é decrescente, em seguida faça um esboço de seu gráfico e determine as coordenadas dos pontos extremos locais.

2) Em que ponto do gráfico da função $f(x) = x^3 - x + 35$ a reta tangente é paralela à reta $y = 11x + 5$?

3) A temperatura de um forno varia com o tempo t de acordo com a expressão:

$$T = 0{,}02\,t^3 + 0{,}2\,t^2 + 110$$

A temperatura está expressa em graus Celsius e o tempo em minutos. Determine a taxa de variação da temperatura T, em relação ao tempo, no instante t = 10 min.

4) Determinar a equação da reta tangente à curva $y = x^3$ no ponto P, de abscissa igual a 2.

5) Qual o ângulo que define a inclinação da reta tangente à curva $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x$, no ponto de abscissa x = 2.

6) Ache os pontos em que as curvas que representam as funções dadas abaixo, têm retas tangentes horizontais.

   a) $y = 2x^2 - 8x + 5$

   b) $y = x^3 - 27x + 10$

7) Achar o ponto sobre a curva $y = -x^2 + 5x$ onde a inclinação da reta tangente é 45º.

8) Considere a função real y = f(x), definida por: $f(x) = x^4 - 18x^2 + 80$, pede-se:

   a) a interseção do gráfico com o eixo dos x;

   b) a interseção do gráfico com o eixo dos y;

   c) intervalos onde a função é crescente;

   d) intervalos onde a função é decrescente;

   e) coordenadas dos pontos extremos (máximos ou mínimos locais)

9) O custo C para se beneficiar uma quantidade q de trigo é dado por $C = q^2 + 400$, onde C é dado em reais e q é dado em toneladas.
   a) Determine a taxa de variação média do custo para o intervalo $1 \le q \le 5$. Qual é o significado gráfico desse resultado obtido?
   b) Calcule a derivada do custo no ponto correspondente a q = 2. O que significa a derivada obtida numericamente e graficamente falando?

10) Para um determinado produto, a receita R, em reais, ao se comercializar a quantidade x, em unidades, é dada pela função: $R = -2x^2 + 1000x$.

   a) Esboce o gráfico de R, ressaltando os seus principais pontos

   b) Calcule a derivada R´(100). Qual a unidade dessa derivada? O que ela representa numericamente? O que ela representa graficamente?

   c) Quantas unidades devem ser comercializadas para que a receita seja máxima?

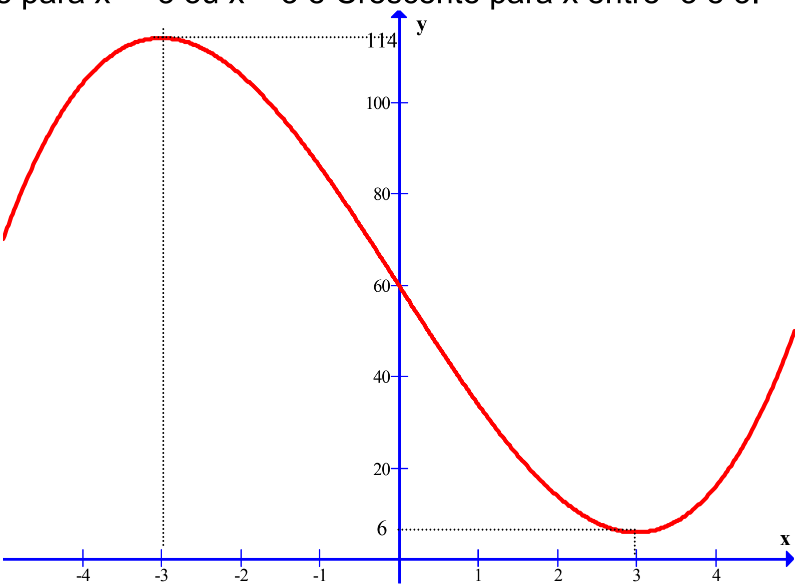
   d) Qual a receita máxima correspondente ao item anterior?

   e) Calcule R´(200). O que significa o sinal do resultado obtido?

   f) Calcule R´(300). O que significa o sinal do resultado obtido?

GABARITO

1) Crescente para x < -3 ou x > 3 e Crescente para x entre -3 e 3.



Ponto de Máximo Local = (-3, 114) e Ponto de Mínimo Local (3, 6)

2) Os pontos são (-2, 29) e (2, 41)

3) 10º C/min

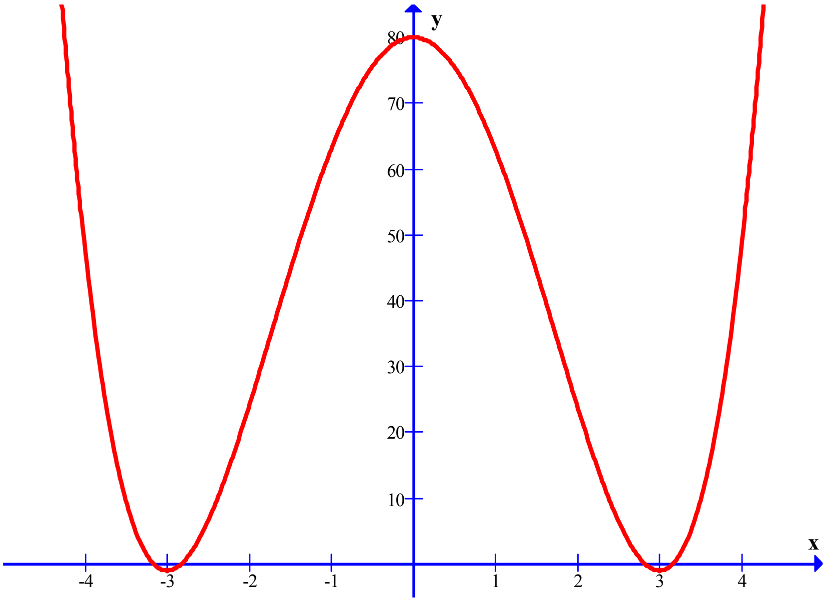
4) y = 12 x – 16

5) inclinação de 135º

6) a) (2, -3) b) (3, -44) e (-3, 64)

7) (3, 6)

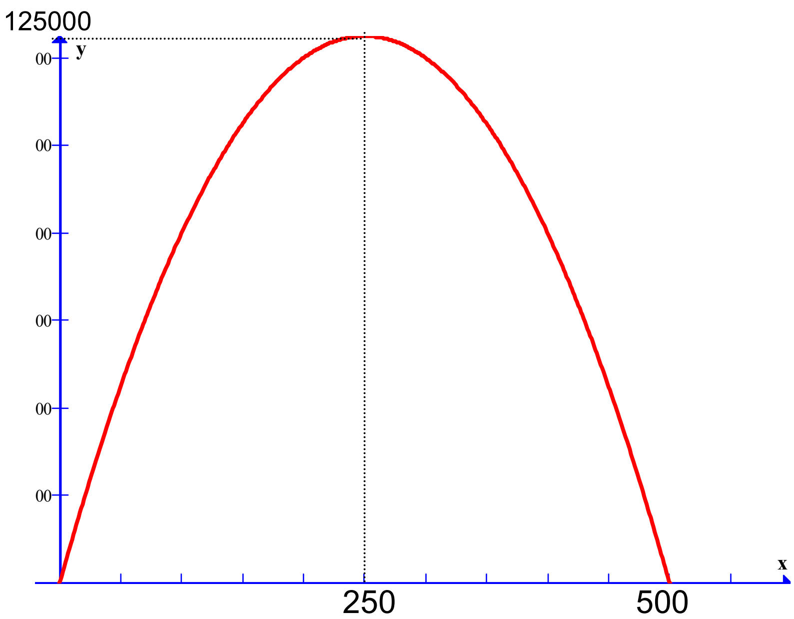
8) a) $x = \pm\sqrt{8}$ e $x = \pm\sqrt{10}$ b) y = 80 c) -3 < x < 0 e x > 3 d) x < -3 e 0 < x < 3 e) Máximo local (0, 80) e Mínimos Locais (-3, -1) e (3, -1)



9) a) 6 reais/ton. É o coeficiente angular da reta secante ao gráfico da função custo, no ponto de abscissas q = 1 e q = 5.

b) 4 reais/ton. Significa que para o beneficiamento de 2 ton. corresponde um aumento de custo de 4 reais por tonelada.

10)



a) Raízes x = 0 e x = 500, ponto de máximo (250, 125 000). Ponto de interseção com o eixo vertical (0, 0).

b) 600 reais / unidade. Representa o acréscimo da receita, por unidade, para a comercialização de 100 unidades. Graficamente é o coeficiente angular da reta tangente à parábola, no ponto de abscissa x = 100.

c) 250 unidades

d) R$ 125 000,00

e) 200 reais / unidade. Significa que é um ponto onde a função receita é crescente.

f) – 200 reais / unidade. Significa que é um ponto onde a função receita é decrescente.