

UNIVERSIDADE SEVERINO SOMBRA
CURSO DE ADMINISTRAÇÃO DE EMPRESAS
MATEMÁTICA 1 – PROF. ILYDIO PEREIRA DE SÁ
FUNÇÃO QUADRÁTICA (PARÁBOLA)

1) Introdução:

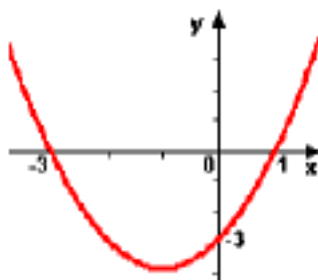
A função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ onde a , b e c são constantes reais, com $a \neq 0$. Esta função é também denominada de função trinômio do segundo grau ou função polinomial do segundo grau.

O gráfico cartesiano desta função polinomial do segundo grau é uma curva plana denominada parábola, como já mostramos em aulas anteriores.

2) O sinal do coeficiente do termo dominante (a)

O sinal do coeficiente do termo dominante desta função polinomial indica a concavidade da parábola. Se $a > 0$ então a concavidade estará voltada para cima e se $a < 0$ estará voltada para baixo.

Exemplo 1: A parábola, que é o gráfico da função $f(x) = x^2 + 2x - 3$, pode ser vista no desenho.



Você também já sabe que os pontos onde a curva corta o eixo horizontal (Ox) são as suas raízes. No caso da função quadrática, eles são obtidos através da solução de uma equação do segundo grau. No exemplo, temos a seguinte equação: $x^2 + 2x - 3 = 0$.

Lembrando que a fórmula para a resolução de uma equação do segundo grau (Báskara) é:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ onde } \Delta = b^2 - 4ac$$

Teremos, para a função do exemplo 1, as seguintes raízes:

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16, \text{ logo,}$$

$$\text{Logo, } x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \rightarrow x = \frac{-2 + 4}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{ou} \quad x = \frac{-2 - 4}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

O que confirma exatamente o que já estávamos observando no gráfico dado.

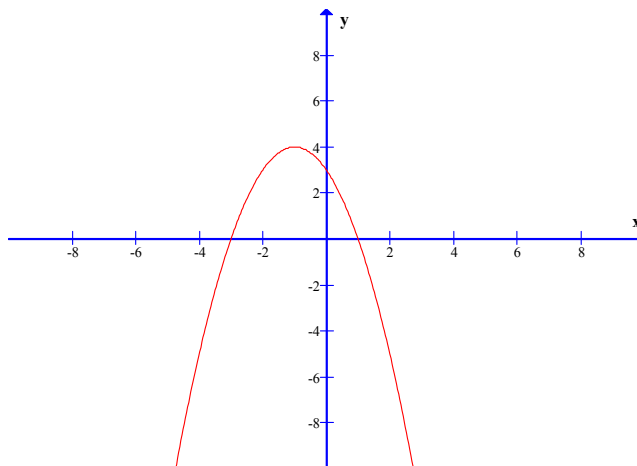
Note ainda que a ordenada do ponto onde a curva corta o eixo vertical (Oy) é exatamente igual ao valor de $f(0)$, que é igual a -3 .

Exemplo 2: Construir a parábola $f(x) = -x^2 - 2x + 3$.

Note que esta função terá as mesmas raízes da função do exemplo 1, pois, quando formos resolver a equação $-x^2 - 2x + 3 = 0$, recairemos na mesma equação anterior, bastando multiplicar todos os termos da sentença por -1 . As diferenças que teremos no gráfico serão:

a) agora a concavidade de parábola estará voltada PARA BAIXO ($a = -1$)

b) O ponto de interseção da curva com o eixo vertical ($f(0)$) será o ponto de ordenada igual a +3.



3) Relacionamento entre o discriminante (Δ) e a concavidade da parábola

Podemos construir uma tabela que relaciona o sinal do discriminante com o sinal de a .

Δ	A Parábola	$a > 0$ (Concavidade para cima)	$a < 0$ (Concavidade para baixo)
$\Delta > 0$	Corta o eixo Ox em dois pontos		
$\Delta = 0$	Toca o eixo Ox em um único ponto		
$\Delta < 0$	Não corta o eixo Ox		

Exercícios: Construir o gráfico cartesiano de cada uma das funções do segundo grau:

a. $f(x) = x^2 - 3x - 4$

b. $f(x) = -3x^2 + 5x - 8$

c. $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$

4) Máximos e mínimos com funções quadráticas

Existem muitas aplicações para a função quadrática e uma delas está relacionada com a questão de máximos e mínimos.

Dependendo do sinal do termo a , a função terá um ponto de máximo ou um ponto de mínimo. Em ambos os casos, tal ponto é denominado de vértice da parábola.

A abscissa do vértice de uma parábola é o ponto médio entre as suas raízes, por conta da simetria vertical que a parábola possui. Dessa forma, como a soma das raízes de uma equação do segundo grau é dada por $S = -b/a$, a abscissa do vértice da parábola será dada pela fórmula:

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

Calculando o valor numérico de $f(x_v)$, teremos a ordenada do vértice, que corresponde ao valor máximo ou valor mínimo dessa função (dependendo da concavidade da parábola).

Exemplo: Determine as coordenadas do vértice da parábola que representa o gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + 2$.

Teremos então:

$$x_v = \frac{4}{2} = 2$$

$$e y_v = 2^2 - 4 \cdot 2 + 2 = 4 - 8 + 2 = -2.$$

Logo, o vértice dessa parábola é o ponto V , de coordenadas $(2, -2)$

O valor -2 representa o **VALOR MÍNIMO** dessa função, pois a parábola (como $a > 0$) tem concavidade voltada para cima.

IMPORTANTE:

Na área de Administração de Empresas, o conhecimento da função quadrática é muito importante na modelagem de diversos problemas de otimização (máximos ou mínimos). Vejamos alguns exemplos:

- 1) Sabe-se que o custo C para produzir x unidades de um certo produto é dado por:
 $C = x^2 - 80x + 3000$ (em reais).
- a) A quantidade de unidades que a empresa deveria produzir, para que seu custo fosse MÍNIMO.

Solução: Como é uma parábola de concavidade voltada para cima, esse valor mínimo será atingido em seu vértice. O número de unidades ideal é dado pelo valor de x_v . Vamos usar a

fórmula que vimos anteriormente: $x_v = \frac{-b}{2a}$, ou seja, $x_v = \frac{80}{2} = 40$

Resposta: 40 unidades

- b) O valor mínimo desse custo de produção

Solução: Basta agora encontrar o valor da função custo (C), para $x = 40$. Teremos:

$$C = 40^2 - 80 \cdot 40 + 3000 = 1600 + 3200 + 3000 = 7800$$

Resposta: R\$ 7800,00

- 2) Sabe-se que o lucro total de uma empresa é dado pela relação $L = R - C$, onde L representa o lucro, R a receita total e C o custo total da produção.

Numa empresa que produziu x unidades, verificou-se que $R = 6000x - x^2$ e $C = x^2 - 2000x$. Nessas condições, qual deve ser a produção ideal dessas empresa, para **MAXIMIZAR** o seu lucro? Qual o valor desse lucro máximo possível nessas condições.

Solução: Vamos, primeiramente, determinar a função do lucro. Como $L = R - C$, teremos:

$$L = 6000x - x^2 - (x^2 - 2000x) = 6000x - x^2 - x^2 + 2000x, \text{ logo,}$$

$$L = -2x^2 + 8000x$$

Nesse caso, como é uma parábola com concavidade voltada para baixo ($a < 0$), teremos um caso de ponto de máximo, mas com a mesma fórmula:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \text{ ou } x_v = \frac{-8000}{-4} = 2000 \text{ unidades.}$$

O valor do lucro máximo iremos obter com o cálculo de $f(2000) = -2 \cdot 2000^2 + 8000 \cdot 2000 = -8\,000\,000 + 16\,000\,000 = 8\,000\,000$ de reais.

Resposta: A produção ideal é de 2000 unidades, que gera um lucro máximo de R\$ 8000 0000,00 para a empresa.

As duas próximas questões, são para você resolver:

- 3) Suponha que um grilo, ao saltar do solo, tenha sua posição no espaço descrita em função do tempo (em segundos) dada pela expressão $h = 3t - 3t^2$, onde h é altura que o grilo alcança, em metros.
- Quanto tempo o grilo vai levar para atingir a altura máxima?
 - Qual a altura máxima alcançada pelo grilo?
- 4) O lucro mensal de uma empresa é dado pela lei: $L = -x^2 + 30x - 5$, onde x representa a quantidade de peças a serem produzidas e L o valor do lucro, em milhares de reais.
- Qual a quantidade ideal de peças a serem produzidas, para gerar o maior lucro possível?
 - Qual o valor máximo possível para esse lucro?