



$$\text{Logo, } 1 + q S_n = S_n + q^{n+1}$$

Ou, rearrumando os termos da igualdade, teremos:

$$q S_n - S_n = q^{n+1} - 1$$

Se  $q$  é distinto de um, então

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Usaremos essa fórmula para algumas das provas que iremos colocar.

## Definição de 0,999...

Podemos escrever

$$0,999\dots = 0,9 + 0,09 + 0,009 + \dots$$

Verificamos tratar-se de uma progressão ou série geométrica (de primeiro término  $a = 0,9$  e razão  $q = 1/10$ ):

$$0,999\dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{0,9}{10^k} = \frac{9}{10} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{10^k}$$

## Limite da série

Aplicando a soma da PG, que demonstramos anteriormente, teremos:

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{10^k} = \frac{1 - 1/10^{n+1}}{1 - 1/10} = \frac{1 - 1/10^{n+1}}{9/10} = \frac{10}{9} \left(1 - \frac{1}{10^{n+1}}\right)$$

Ao tomar o limite, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{9} \left(1 - \frac{1}{10^{n+1}}\right) = \frac{10}{9} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{10^{n+1}}\right) = \frac{10}{9} \cdot 1$$

Assim, finalmente,

$$0,999\dots = \frac{9}{10} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{10^k} = \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{9} = 1$$

como se queira demonstrar.

## Argumentos não-formais

Apresentaremos a seguir alguns argumentos não formais mas que podem ser usados em classes do Ensino Fundamental.

### Multiplicação de 1/3

- Dizemos que  $1/3 = 0,333\dots$
- Multiplicamos por 3 ambos os membros:  $3 \times (1/3) = 3 \times 0,333\dots$ , que deveria dar 0,999...
- Vemos que 0,999... deve ser 1, pois, que  $(1/3) \times 3 = 1$ .

0.333...	= 1/3
3 × 0.333...	= 3 × 1/3
0.999...	= 1

### Com $x = 0,999\dots$

- Suponhamos que  $x = 0,999\dots$  [1]
- Multiplicamos por 10 os dois números:  $10x = 9,999\dots$  [2]
- Subtraindo membro a membro dessas igualdades ([2] - [1]), teremos:  $10x - x = 9,999\dots - 0,999\dots$
- Obtemos que  $9x = 9$ , é dito,  $x = 1$ , como queríamos demonstrar.

### Com fórmula matemática

- Se  $x$  é um número inteiro entre 0 e 9, podemos considerar a seguinte fórmula

$$0.xxx\dots = \frac{x}{9}$$

- Tomamos o valor numérico de "x" como "9"
- Chegamos a conclusão de que:

$$0.999\dots = \frac{9}{9}$$

### Transformando num produto.

$$\begin{aligned} &1 \\ &= 9/9 \\ &= 9 \times 1/9 \\ &= 9 \times 0,111\dots \\ &= 0,999\dots \end{aligned}$$

## Soma de frações

Se  $1/11 = 0,090909\dots$  e  $10/11 = 0,909090\dots$

então

$$1/11 + 10/11 = 0,999999\dots$$

Mas

$$1/11 + 10/11 = 11/11 = 1$$

## Prova

Consideremos a progressão geométrica de termo inicial 0,9 e razão 0,1. Assim, temos:

$$a_1 = 0,9$$

$$a_2 = 0,09$$

$$a_3 = 0,009$$

Portanto, imaginamos (corretamente) que 0,999... (com reticências) seja igual à soma infinita desta progressão geométrica. Assim, temos:

$$0,999\dots = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{0,9}{1 - 0,1} = \frac{0,9}{0,9}$$

ou seja:

$$0,999\dots = 1$$

Há outras provas mais sofisticadas que fazem uso de limites, séries infinitas, encaixe de intervalos, cortes de Dedekind ou sucessões de Cauchy; todas chegam à mesma conclusão. O mesmo vale para qualquer dízima periódica cujo período seja 9. Ou seja, 2,2999... é igual a 2,3; 5,677999... é igual a 5,678; e assim por diante.

## Conceitos equivocados

### O número 0,999... tende a 1

Um conceito equivocado é o de que 0,9999... pode não ser exatamente um, mas como está muitíssimo perto, esse número tenderia a um. Sempre existiria uma pequena fração que seja da unidade, independente de quantos termos tomarmos para que seja exatamente 1. Um número, no entanto, não pode tender a outro, este conceito não existe nos reais.

Para mais informações sobre o assunto, recomento a leitura do artigo, das professoras Lucia Villela e Estela Kaufman, disponível em <http://www.sbemrj.com.br/spemrj6/artigos/b4.pdf>.

Fonte: <http://pt.wikipedia.org/>