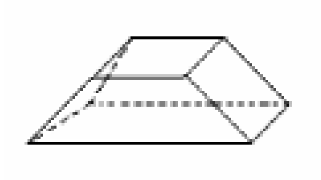
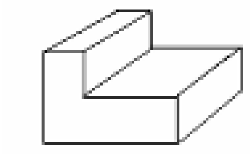
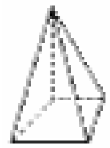
3ª aula: Poliedros

Chamamos de *poliedro* o sólido limitado por quatro ou mais polígonos planos, pertencentes a planos diferentes e que têm dois a dois somente uma aresta em comum. Veja alguns exemplos:

Os polígonos são as faces do poliedro; os lados e os vértices dos polígonos são as arestas e os vértices do poliedro.

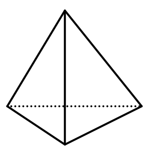
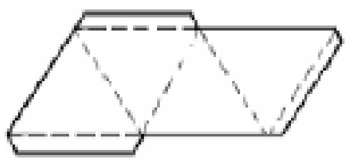
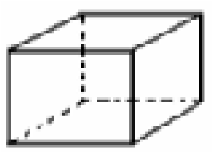
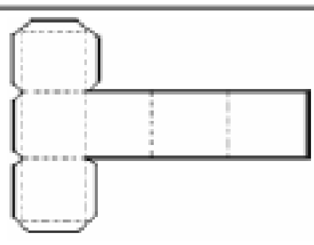
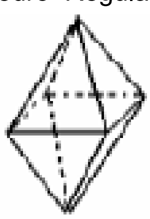
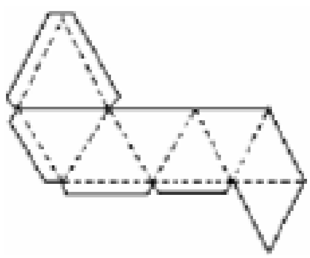
Poliedros convexos e côncavos
Observando os poliedros acima, podemos notar que, considerando qualquer uma de suas faces, os poliedros encontram-se inteiramente no mesmo semi-espaço que essa face determina. Assim, esses poliedros são denominados *convexos*.
Isso não acontece no último poliedro, pois, em relação a duas de suas faces, ele não está contido apenas em um semi-espaço. Portanto, ele é denominado côncavo.

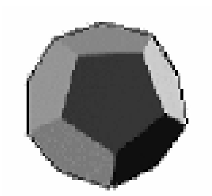
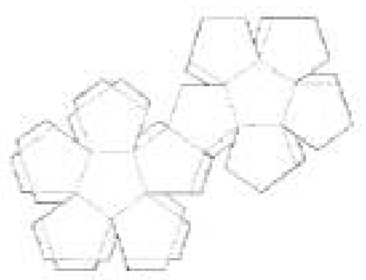
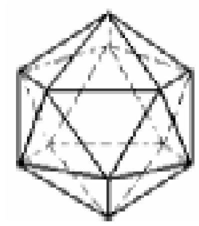
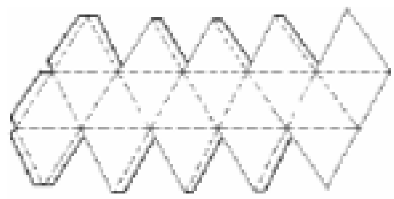
Classificação
Os poliedros convexos possuem nomes especiais de acordo com o número de faces, como por exemplo:

- tetraedro: quatro faces ; pentaedro: cinco faces ; hexaedro: seis faces ; heptaedro: sete faces
- octaedro: oito faces ; icosaedro: vinte faces

Poliedros regulares
Um poliedro convexo é chamado de regular se suas faces são polígonos regulares, cada um com o mesmo número de lados e, para todo vértice, converge um mesmo número de arestas.

Existem apenas cinco poliedros regulares:

Poliedro	Planificação	Elementos
Tetraedro Regular 		4 faces triangulares equiláteras 4 vértices 6 arestas
Hexaedro Regular 		6 faces quadradas 8 vértices 12 arestas
Octaedro Regular 		8 faces triangulares equiláteras 6 vértices 12 arestas

Dodecaedro Regular 		12 faces pentagonais equiláteras 20 vértices 30 arestas
Icosaedro Regular 		20 faces triangulares equiláteras 12 vértices 30 arestas

Fórmulas e Relações Importantes nos Poliedros:

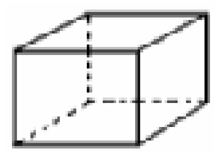
1) Relação de Euler

Em todo poliedro convexo é válida a relação seguinte:

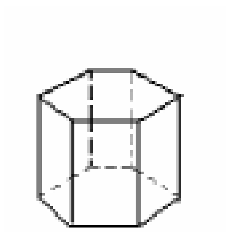
$$V + F = A + 2$$

em que **V** é o número de vértices, **A** é o número de arestas e **F**, o número de faces.

Observe os exemplos:



V=8 A =12 F=6
8 + 6 = 12 + 2



V = 12 A = 18 F = 8
12 + 8 = 18 + 2

2) Poliedros platônicos

Diz-se que um poliedro é platônico se, e somente se:

a) for convexo;
b) em todo vértice concorrer o mesmo número de arestas;
c) toda face tiver o mesmo número de arestas;
d) for válida a relação de Euler.

Assim, nas figuras acima, o primeiro poliedro é platônico e o segundo, não-platônico.

Verifique que todos os poliedros regulares são platônicos, sendo que as faces são polígonos regulares. Alguns autores não fazem a diferença entre poliedros regulares e platônicos, considerando sinônimos esses dois conceitos.

3) Contagem das arestas

a) **Contagem pelos tipos de faces.**

Vamos representar por f_3 o número de faces triangulares do poliedro, por f_4 o número de faces quadrangulares, por f_5 o número de faces pentagonais, etc...Se contarmos as arestas de cada uma das faces, teremos o dobro das arestas do poliedro, já que cada aresta serve para duas de suas faces. Logo, teremos:

$$2.A = 3.f_3 + 4.f_4 + 5.f_5 + ...$$

b) Contagem pelos tipos de ângulos poliédricos

Vamos representar por v_3 o número de vértices com 3 arestas do poliedro, por v_4 o número de vértices com 4 arestas, por v_5 o número de vértices com 5 arestas, etc...Se contarmos as arestas de cada um dos vértices, teremos o dobro das arestas do poliedro, já que cada aresta serve para dois vértices. Logo, teremos:

$$2.A = 3.v_3 + 4.v_4 + 5.v_5 + ...$$

4) Cálculo do número total de Diagonais de um poliedro convexo.

$$D = C_{v,2} - A - \sum d$$

Sendo $\sum$d = total das diagonais das faces do poliedro.

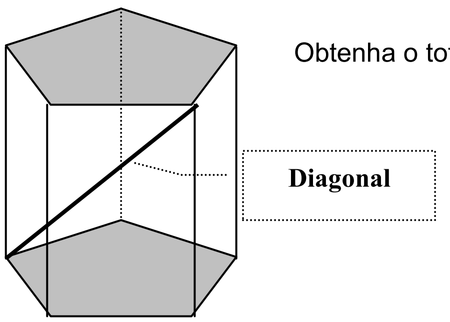
Lembrete: A contagem do número de diagonais de uma das faces é feita pela fórmula $D = \frac{n.(n-3)}{2}$

n representa o número de arestas da face.

5) Soma dos ângulos internos de todas as faces de um poliedro
S = 360º . (V – 2) (Faça, como exercício, a demonstração dessa fórmula)

EXERCÍCIOS:

1)



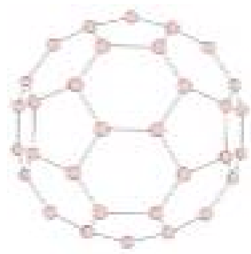
Obtenha o total de diagonais do poliedro convexo visto na figura ao lado.

2) Quantas diagonais possui o icosaedro regular? Qual a soma dos ângulos internos de todas as faces do icosaedro regular?

3) Um poliedro convexo tem 3 faces triangulares, 1 face quadrangular, 1 face pentagonal e 2 faces hexagonais. Obtenha:

a) O número total de vértices, faces e arestas do poliedro.
b) O número de diagonais do poliedro
c) A soma dos ângulos internos de todas as faces.

4) (AFA) Um poliedro convexo tem 16 faces. De um dos seus vértices partem 5 arestas; de cinco outros vértices partem 4 arestas e, de cada um dos vértices restantes, partem 3 arestas. Qual o número total de arestas desse poliedro?



5) Numa publicação científica, de 1985, foi divulgada a descoberta de uma molécula tridimensional de carbono, na qual os átomos ocupam os vértices de um poliedro convexo cujas faces são 12 pentágonos e 20 hexágonos regulares, como numa bola de futebol. Essa molécula foi denominada "fulereno", em homenagem ao arquiteto norte-americano B. Fuller. Quantos são os átomos de carbono dessa molécula e o número de ligações entre eles.

6) (CEFET - PR) Um poliedro convexo possui duas faces triangulares, duas quadrangulares e quatro pentagonais. Logo, a soma dos ângulos internos de todas as faces será:

a) 3240º b) 3640º c) 3840º c) 4000º d) 4060º

7) (CEFET - PR) O número de vértices de um poliedro convexo de 10 faces quadrangulares é:

a) 32 b) 12 c) 20 d) 15 e) 18

8) (PUC - SP) Um poliedro convexo tem 3 faces pentagonais e algumas faces triangulares. Qual o número de faces desse poliedro, sabendo-se que o número de arestas é o quádruplo do número de faces triangulares?

a. 4 b. 3 c. 5 d. 6 e. 8

9) (ITA - SP) Um poliedro convexo tem 13 faces. De um dos seus vértices partem 6 arestas; de 6 outros vértices partem, de cada um, 4 arestas, e finalmente, de cada um dos vértices restantes partem 3 arestas. O número de arestas desse poliedro é:

a. 13 b. 17 c. 21 d. 24 e. 27

10) (PUC - PR) Se a soma dos ângulos das faces de um poliedro regular é 1440º, então o número de arestas desse poliedro é:

a. 12 b. 8 c. 6 d. 20 e. 4