



Módulo e Função Modular

• Função definida por mais de uma sentença

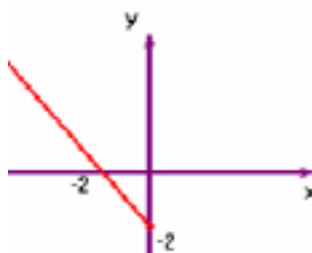
Seja uma função $f: \mathbf{R}_+ \cup \mathbf{R}$, onde $f(x) = x^2$.

O domínio dessa função é formado pelos reais não-negativos. Ao ser feito seu gráfico, tem-se apenas um pedaço da parábola.



Agora considere uma outra função $f: \mathbf{R}_-^* \cup \mathbf{R}$, onde $f(x) = -x - 2$.

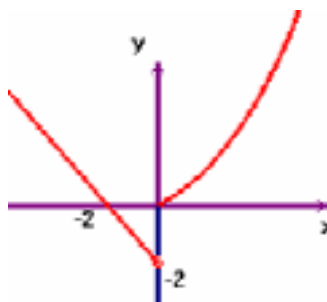
O domínio dessa função é formado pelos reais negativos. Ao ser feito seu gráfico, tem-se apenas um pedaço da reta.



As duas funções podem ser reunidas numa única função. Sua representação será feita da seguinte forma:

$$f: \mathbf{R} \cup \mathbf{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x - 2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

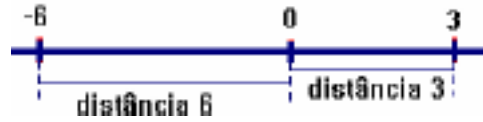


• Módulo ou valor absoluto de um número

Dado um número real qualquer, o módulo desse número é uma operação que o torna positivo (exceto o zero).

$$|5| = 5 \quad | -5 | = 5 \quad |0| = 0 \quad | -0,2 | = 0,2 \quad | \sqrt{5} | = \sqrt{5}$$

Possui um significado geométrico que é a distância desse número até o zero na reta real.



$|3| = 3$, pois a distância do 3 ao 0 vale 3.

$|-6| = 6$, pois a distância do -6 ao 0 vale 6.

Generalizando para um número qualquer x:

$$|x| = \begin{cases} \geq x & \text{se } x \text{ não for negativo (} x \geq 0) \\ x & \text{se } x \text{ for negativo (} x < 0) \end{cases}$$

OBS: Note que a sentença acima indica que o módulo de um número qualquer será igual ao próprio número, se este número não for negativo e será igual ao seu simétrico, se o número for negativo.

Expressões algébricas que possuem letra dentro do módulo podem ser substituídas por sentenças equivalentes que não têm módulo, desde que seja informado para que valores da letra a expressão equivalente é válida. Veja alguns exemplos:

$$\begin{aligned} \diamond |x + 5| &= \begin{cases} \geq x + 5 & \text{se } x + 5 \geq 0 \quad | \quad \text{se } x \geq -5 \\ x + 5 & \text{se } x + 5 < 0 \quad | \quad \text{se } x < -5 \end{cases} \\ &\quad \begin{aligned} \blacksquare \text{ Se } x = 7 \text{ então } |7 + 5| &= 7 + 5 \\ \blacksquare \text{ Se } x = -3 \text{ então } |-3 + 5| &= -3 + 5 \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \diamond |x - 3| &= x - 3 \quad (\text{se } x \geq 3) \\ &\quad \blacksquare \text{ Se } x = 8 \text{ então } |8 - 3| = 8 - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \diamond |2x - 8| &= 2x + 8 \quad (\text{se } x < 4) \\ &\quad \blacksquare \text{ Se } x = -1 \text{ então } |2 \cdot (-1) - 8| = 2 \cdot (-1) + 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \diamond |x^2| &= x^2 \quad \text{para qualquer valor real de } x \\ &\quad \blacksquare \text{ Se } x = -3 \text{ então } |(-3)^2| = (-3)^2 \end{aligned}$$

• Propriedades do módulo:

$$\begin{aligned} \diamond |x| &= |-x| \\ \text{O módulo de um número é igual ao módulo do seu simétrico.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \diamond |x^2| &= x^2 \\ \text{O módulo do quadrado de um número é igual ao quadrado desse número.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \diamond |a - b| &= |b - a| \\ \text{O módulo da diferença de dois números é comutativo.} \end{aligned}$$

$$\diamond \quad |x| = \sqrt{x^2}$$

O módulo de um n° é igual à raiz quadrada do seu quadrado.

FUNÇÃO MODULAR

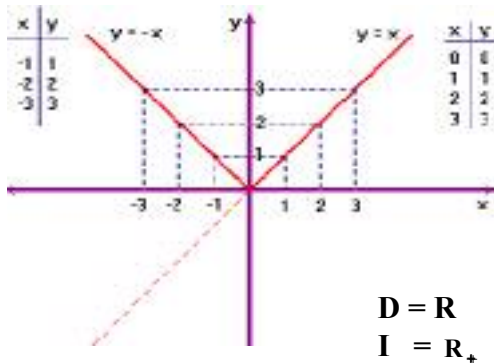
Quando uma função é colocada dentro de um módulo, a função é denominada modular. Seu formato é dado por: $y = |f(x)|$.

Esta função pode ser substituída por outras duas funções que são equivalentes à função anterior: $\begin{cases} y = f(x) & \text{se } f(x) \text{ for maior ou igual a zero} \\ y = -f(x) & \text{se } f(x) \text{ for menor que zero} \end{cases}$.

Serão dados alguns exemplos de funções modulares. Todas serão representadas por mais de uma sentença.

Ex. 1: $f(x) = |x|$. Para ser efetuada a construção gráfica, a função modular será

desmembrada em duas: $\begin{cases} y = x & \text{se } x \geq 0 \\ y = -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

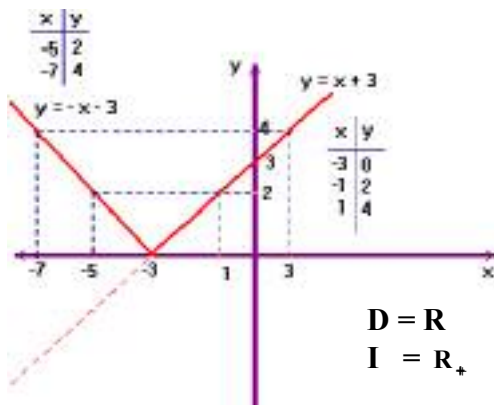


Observe que a função que estava dentro do módulo (no caso a função identidade $y = x$) foi mantida para valores de y positivos (acima do eixo x).

Já para valores negativos de y (abaixo do eixo x) a função foi rebatida em relação ao eixo x . Foi obtida uma nova função ($y = -x$) simétrica à anterior em relação ao eixo x .

Resumindo: a parte da função que estava “em baixo” do eixo x foi refletida para cima do eixo x . Essa idéia valerá para todas as funções modulares. Daqui em diante, o gráfico da função modular será construído usando tal idéia.

Ex. 2: $f(x) = |x+3|$. As funções equivalentes serão: $\begin{cases} x+3 & \text{se } x \geq -3 \\ -x-3 & \text{se } x < -3 \end{cases}$

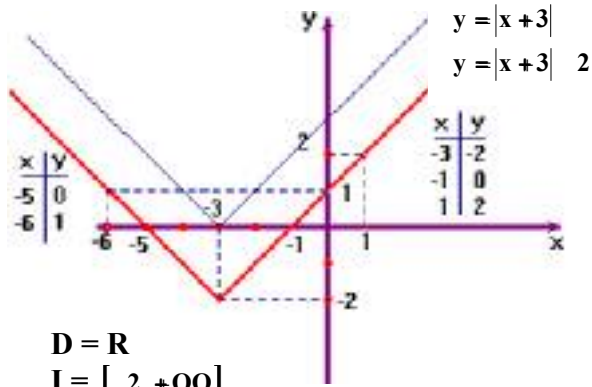


A função que estava dentro do módulo ($y = x + 3$) foi mantida para valores de x maiores que -3 (acima do eixo x).

Já para valores menores que -3 (abaixo do eixo x), a função foi rebatida em relação ao eixo x . Foi obtida uma nova função ($y = -x - 3$) simétrica à anterior em relação ao eixo x .

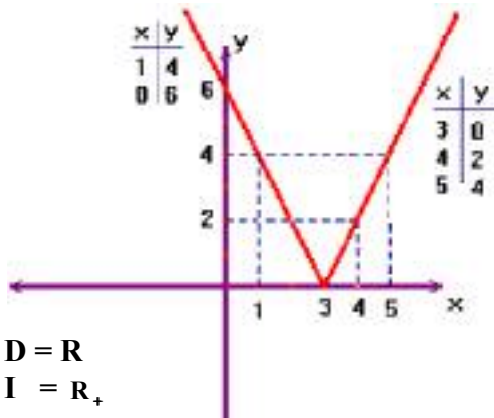
Observe também que esta função foi deslocada de 3 unidades para esquerda em relação à função anterior $y = |x|$.

Ex. 3: $f(x) = |x+3| - 2$. As funções equivalentes serão: $\begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq 3 \\ x-5 & \text{se } x < 3 \end{cases}$



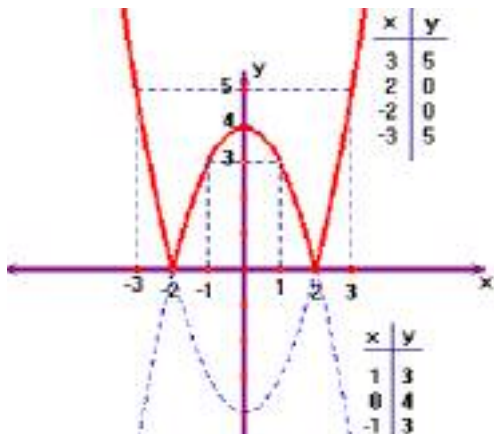
Comparando com a função anterior $y = |x+3|$, constata-se um deslocamento para baixo de 2 unidades. Com isso a imagem passa a incluir números reais negativos.

Ex. 4: $f(x) = |2x - 6|$. As funções equivalentes serão: $\begin{cases} 2x - 6 & \text{se } x \geq 3 \\ 6 - 2x & \text{se } x < 3 \end{cases}$



A letra “V” mudou de inclinação uma vez que coeficiente angular ($a = 2$) da função de primeiro grau que está dentro do módulo foi aumentado em relação às anteriores.

Ex. 5: $f(x) = |x^2 - 4|$. As funções equivalentes serão: $\begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x \geq 2 \text{ ou } x \leq -2 \\ x^2 + 4 & \text{se } -2 < x < 2 \end{cases}$



As partes da parábola $y = x^2 - 4$ à direita do 2 e à esquerda do -2 foram mantidas uma vez que tinham y não negativo (“acima” ou no próprio eixo x).

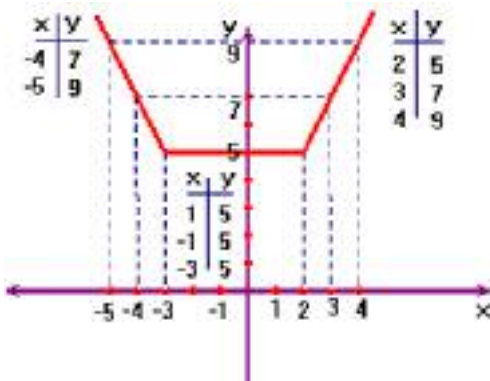
Já a parte da parábola que estava situada entre $-2 < x < 2$ foi rebatida para cima, visto que tinham sinal negativo de y (abaixo do eixo x).

Ex. 6: $f(x) = |x+3| + |x-2|$.

$$\begin{array}{ccc} -x-3 & x+3 & x+3 \\ -x+2 & -x+2 & x-2 \\ -x-3-x+2 & x+3-x+2 & x+3+x-2 \\ \hline -3 & 2 & 2 \end{array}$$

As funções equivalentes serão:

$$\begin{aligned} &\geq 2x+1 \quad \text{se } x \geq 2 \\ &5 \quad \text{se } -3 < x < 2 \\ &\leq 2x-1 \quad \text{se } x < -3 \end{aligned}$$



Note que agora a função foi dividida em três partes. Uma reta crescente ($a > 0$) para valores de x maiores ou iguais a 2, uma reta constante para x entre -3 e 2 e uma reta decrescente ($a < 0$) para valores de x menores que -3.

EQUAÇÃO MODULAR

Uma equação onde a variável esteja dentro de um módulo é denominada **modular**. Serão resolvidas algumas equações modulares.

Ex. 1: $|x| = 7 \Leftrightarrow x = 7 \text{ ou } x = -7$

Ex. 2: $|x+1| = 5$

- $x + 1 = 5 \Leftrightarrow x = 5 - 1 \Leftrightarrow x = 4$
- $-x - 1 = 5 \Leftrightarrow x = -5 - 1 \Leftrightarrow x = -6$
- Esta segunda parte poderia também ser resolvida como: $x + 1 = -5$ ou $x = -6$.

Ex. 3: $|2x - 3| = 4$

- $2x - 3 = 4 \Leftrightarrow 2x = 4 + 3 \Leftrightarrow x = 7/2$
- $-2x + 3 = 4 \Leftrightarrow -2x = 4 - 3 \Leftrightarrow x = -1/2$ ou então fazendo $2x - 3 = -4$, que gera $2x = -1$ ou $x = -1/2$.

Ex. 4: $|5x - 1| = 8$

- Esta equação não possui solução uma vez que não é possível que o módulo resulte num número negativo (-8)

Ex. 5: $|x^2 - 3| = 13$

▪ $x^2 - 3 = 13 \Leftrightarrow x^2 = 13 + 3 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4$

▪ $-x^2 + 3 = 13 \Leftrightarrow x^2 = -13 + 3 \Leftrightarrow x^2 = -10 \Leftrightarrow S = \emptyset$

Poderia também fazer: $x^2 - 3 = -13$ ou ainda $x^2 = -10$, o que acarreta em solução vazia, no campo dos números reais.

Ex. 6: $|x + 3| = 2x - 5$

▪ $x + 3 = 2x - 5 \Leftrightarrow x = 5 + 3 \Leftrightarrow x = 8$

▪ $-x - 3 = 2x - 5 \Leftrightarrow 3x = 5 - 3 \Leftrightarrow x = 2/3$

(esta solução não serve, pois o resultado de um módulo, no caso $2x - 5$, deve ser maior ou igual a zero $\Leftrightarrow 2x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5/2$), logo teremos: $S = \{8\}$

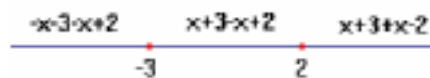
Ex. 7: $|x|^2 - 5|x| + 6 = 0$

Troca-se $|x|$ por y : $y^2 - 5y + 6 = 0 \Leftrightarrow y = 2$ ou $y = 3$

▪ $|x| = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2$

▪ $|x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3$

Ex. 8: $|x + 3| + |x - 2| = 4$



▪ $x + 3 + x - 2 = 4 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = 1,5$ (não serve, pois x deve ser maior que 2)

▪ $x + 3 - x + 2 = 4 \Leftrightarrow 0x = -1 \Leftrightarrow$ impossível

▪ $-x - 3 - x + 2 = 4 \Leftrightarrow -2x = 5 \Leftrightarrow x = -2,5$ (não serve, pois x deve ser menor que -3). Solução vazia.

INEQUAÇÃO MODULAR

Uma inequação onde a variável esteja dentro de um módulo é denominada **modular**. Serão resolvidas algumas inequações modulares.

Ex. 1: $|x| > 3$

▪ $x > 3$

▪ $-x > 3 \Leftrightarrow x < -3$

A solução será a união desses dois intervalos:



Ex. 2: $|x| \leq 3$

▪ $x \leq 3$

▪ $-x \leq 3 \Leftrightarrow x \geq -3$

A solução será a interseção desses dois intervalos:



Ex. 3: $|2x - 5| < 6$

- $2x - 5 < 6 \Leftrightarrow x < 11 \Leftrightarrow x < 5,5$
- $-2x + 5 < 6 \Leftrightarrow -2x > 1 \Leftrightarrow x > -1/2$

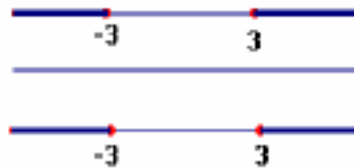
A solução será a interseção desses dois intervalos:



Ex. 4: $|x^2 - 2| \geq 7$

- $x^2 - 2 \geq 7 \Leftrightarrow x^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3 \text{ ou } x \geq 3$
- $-x^2 + 2 \geq 7 \Leftrightarrow -x^2 - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$

A solução será a união desses dois intervalos:



EXERCÍCIOS

1 - Calcule

- a) $|7| \cdot |3| \leq |2|$
- b) $|4| + |7|/|4|$
- c) $|x^2 - 5x| \leq 7 \text{ Qdo } x = -2$
- d) $|3| \cdot |7| \leq |4|$

2 - Escreva, nos seguintes itens, uma sentença equivalente que não tenha módulo:

- a) $|x^3|$ com $x \in \mathbb{R}$
- b) $|2x - 6|$ com $x < -3$
- c) $|x - 4|$ com $x < 4$
- d) $|x^2 - 9|$ com $-3 < x < 3$
- e) $|x + 5|$ com $x \in \mathbb{R}$
- f) $|x - 2| + |x + 3|$ com $x > -3$
- g) $|2x + 4| + |x - 3|$ com $x \in \mathbb{R}$

3 - Diga quais dos itens a seguir apresentam sentenças equivalentes.

- a) $|x - 3| \Leftrightarrow x - 3$
- b) $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$
- c) $|x - 1| \Leftrightarrow |1 - x|$
- d) $||3| - 7| \Leftrightarrow |7| - |3|$
- e) $x = |5| \Leftrightarrow x = 5$
- f) $|x + 1| \Leftrightarrow \sqrt{(x + 1)^2}$

4 - Qual o significado geométrico, utilizando a reta real, das seguintes expressões:

- a) $|x|$
- b) $|5 - 2|$
- c) $|x + 3|$
- d) $|5|$

5 - Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = |x|$, calcule quando existir:

- a) $f(7)$
- b) $f(-4)$
- c) $f(0)$
- d) $f(4)$
- e) x tal que $f(x) = 8$
- f) x tal que $f(x) = -2$

6 - Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = |3x + 15|$.

- a) Escreva $f(x)$ sem utilizar módulo
 b) Calcule $f(2)$, $f(7)$, $f(-1)$ e $f(5)$ usando a resposta do item a)

7 - Construa o gráfico das seguintes funções definidas de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{se } x < 1 \\ x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

- a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 < x < 1 \\ x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ b) $f(x) = |x + 2|$
 c) $f(x) = |2x - 6|$ g) $f(x) = |x + 3| \cdot |x - 5|$
 d) $f(x) = -|3x + 12|$ h) $f(x) = |3x - 6| + 3x$
 e) $f(x) = |x^2 + 4x|$ i) $f(x) = |x|/x$
 f) $f(x) = |x + 1| \cdot 3$ j) $f(x) = 1 \cdot |x + 1|$

8 - Na função $y = |2x - 10|$, definida de \mathbb{R} em \mathbb{R} , diga quais são os valores do domínio que possuem imagem 4.

9 - Identifique o conjunto solução das equações.

- a) $|x - 7| = 10$ b) $|2x + 9| = 12$ c) $|5x + 1| = x - 2$ d) $|2 - 4x| = \frac{x}{2}$ e)
 f) $|7 - 2x| = |5x + 3|$ g) $|x|^2 - 4|x| + 3 = 0$ h) $|x^2 - 2x| = 2x$

10 - Quantas e quais são as raízes da equação: $|3x + 1| + |2x - 7| = 6$?

11 - Resolva as inequações:

- a) $|2x - 3| > 5$ b) $|1 - 7x| \leq 2$ c) $|x^2 - 4| < 5$ d) $|x|^2 + 3|x| \geq 0$

12 - Que valores de x satisfazem a inequação: $|x| < 2x - 4$?

13 - (PUC) Para definir módulo de um número real x posso dizer que:

- a) é igual ao valor de x se x é real
 b) é o maior valor do conjunto formado por x e o oposto de x
 c) é o valor de x tal que $x \in \mathbb{N}$
 d) é o oposto do valor de x
 e) é o maior inteiro contido em x

14 - (MACKENZIE) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = 2|x - 3| + x - 1$. O conjunto-imagem da função f é:

- a) $\{y \in \mathbb{R} / y \geq 2\}$ d) $\{y \in \mathbb{R} / y \geq -2\}$
 b) $\{y \in \mathbb{R} / y \geq 3\}$ e) \mathbb{R}
 c) $\{y \in \mathbb{R} / y \geq 3\}$

15 - (F.G.V.) Sejam x e y números reais quaisquer. Assinale a afirmação correta:

- a) $|x + y| \cdot (|x| + |y|) / 2$ d) $|xy| > |x| \cdot |y|$
 b) $|x| + |y| > \sqrt{x^2 + y^2}$ e) $|x| + |y| = 2 \leq \sqrt{x^2 + y^2}$

$$c) \frac{|x - y| + (||x| - |y||)}{2}$$

DESAFIO

1- Faça o gráfico de $y = ||x + 1| - 3|$

2- Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$. Complete a seguinte lacuna com $>$, $<$, \cdot , \div , ou $=$. Justifique.

$$|x| + |y| \text{ _____ } |x + y|$$

GABARITO

1-a) -11 b) 11/4 c) 7 d) 0

2-a) $-x^3$ b) $-2x-6$ c) $-x+4$ d) $-x^2+9$ e) $\begin{cases} \geq x + 5 \dots \text{se} \dots x > 5 \\ |x| < 5 \dots \text{se} \dots x \cdot < 5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \geq 2x + 1 \dots \text{se} \dots x < 2 \\ |x| < 5 \dots \text{se} \dots |x| < 2 \end{cases}$ g) $\begin{cases} \geq 3x + 1 \dots \text{se} \dots x < 3 \\ x + 7 \dots \text{se} \dots |x| < 2 \cdot x < 3 \\ |3x| < 1 \dots \text{se} \dots x < 1/3 \end{cases}$

3- c, d, e, f

4-a) a distância de um n^o até o zero b) a distância do 5 ao 2 c) a distância de um n^o até o -3 d) a distância do -5 até o zero

5-a) 7 b) 4 c) 0 d) 4 e) $x=8$ ou $x=-8$ f) não existe

6-a) $y = \begin{cases} \geq 3x - 15 \dots \text{se} \dots x < 5 \\ |3x + 15| \dots \text{se} \dots x < 5 \end{cases}$ b) $f(2)=9$ $f(7)=6$ $f(-1)=18$ $f(5)=0$

7- em folha anexa 8- $x=3$ e $x=7$ 9-a) 17 e -3 b) 1,5 e -10,5 c) \emptyset d) 4/9 e 4/7
e) 4/7 e -10/3 f) -6, 1, -2 e -3 g) 1, -1, -3 e 3 h) 0 e 4 10- não possui solução

11-a) $x > 4$ ou $x < -1$ b) $\frac{1}{7} \leq x \leq \frac{3}{7}$ c) $-3 < x < 3$ d) \mathbb{R} 12- $x > 4$ 13- b 14- e 15- c

DESAFIO

1-