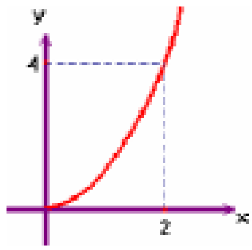
INSTITUTO DE APLICAÇÃO FERNANDO RODRIGUES DA SILVEIRA-UERJ
DISCIPLINA: MATEMÁTICA (FUNÇÕES)
PROFˢ: QUARANTA / ILYDIO / 1ª SÉRIE – ENSINO MÉDIO

Módulo e Função Modular

• Função definida por mais de uma sentença

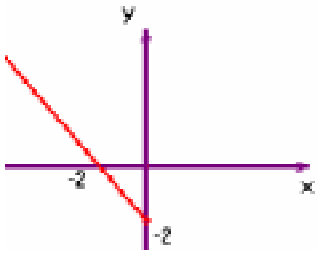
Seja uma função **f : $R_+ \to$ R**, onde **f(x) = x^2.**

O domínio dessa função é formado pelos reais não-negativos. Ao ser feito seu gráfico, tem-se apenas um pedaço da parábola.



Agora considere uma outra função **f :** $R_-^* \to$ **R,** onde **f(x) = -x – 2.**

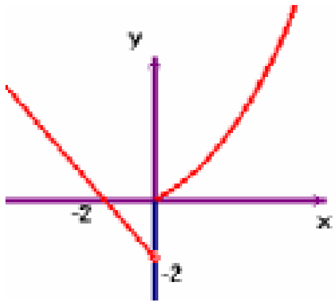
O domínio dessa função é formado pelos reais negativos. Ao ser feito seu gráfico, tem-se apenas um pedaço da reta.



As duas funções podem ser reunidas numa única função. Sua representação será feita da seguinte forma:

f : R $\to$ R

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x-2 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

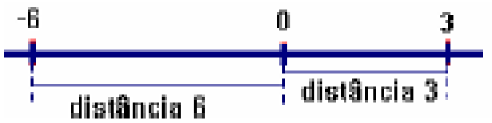


• Módulo ou valor absoluto de um número

Dado um número real qualquer, o módulo desse número é uma operação que o torna positivo (exceto o zero).

$|5| = 5$ $\quad |-5| = 5$ $\quad |0| = 0$ $\quad |-0{,}2| = 0{,}2$ $\quad |\sqrt{5}| = \sqrt{5}$

Possui um significado geométrico que é a distância desse número até o zero na reta real.



$|3| = 3$, pois a distância do 3 ao 0 vale 3.

$|-6| = 6$, pois a distância do -6 ao 0 vale 6.

Generalizando para um número qualquer x:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se x não for negativo } (x \geq 0) \\ -x & \text{se x for negativo } (x < 0) \end{cases}$$

OBS: Note que a sentença acima indica que o módulo de um número qualquer será igual ao próprio número, se este número não for negativo e será igual ao seu simétrico, se o número for negativo.

Expressões algébricas que possuem letra dentro do módulo podem ser substituídas por sentenças equivalentes que não têm módulo, desde que seja informado para que valores da letra a expressão equivalente é válida. Veja alguns exemplos:

- $|x-5| = \begin{cases} x-5 & se\ x-5 \geq 0 \Rightarrow se\ x \geq 5 \\ -x+5 & se\ x-5 < 0 \Rightarrow se\ x < 5 \end{cases}$
  - Se x = 7 então $|7-5| = 7-5$
  - Se x = 3 então $|3-5| = -3+5$

- $|x-3| = x-3 \ (\text{se } x \geq 3)$
  - Se x = 8 então $|8-3| = 8-3$

- $|2x-8| = -2x+8 \ (\text{se } x < 4)$
  - Se x = -1 então $|2\cdot(-1)-8| = -2\cdot(-1)+8$

- $|x^2| = x^2$ para qualquer valor real de x
  - Se x = -3 então $|(-3)^2| = (-3)^2$

• Propriedades do módulo:

- $|x| = |-x|$

  O módulo de um número é igual ao módulo do seu simétrico.

- $|x^2| = x^2$

  O módulo do quadrado de um número é igual ao quadrado desse número.

- $|a-b| = |b-a|$

  O módulo da diferença de dois números é comutativo.

❖ $|x| = \sqrt{x^2}$

O módulo de um nº é igual à raiz quadrada do seu quadrado.

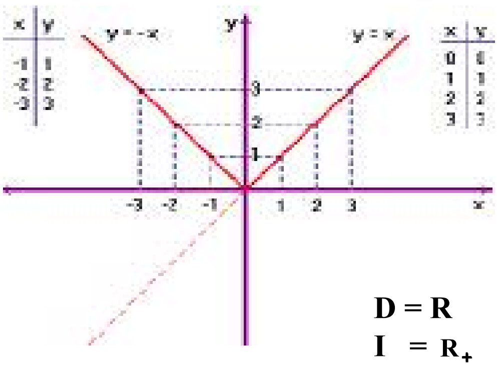
FUNÇÃO MODULAR

Quando uma função é colocada dentro de um módulo, a função é denominada modular. Seu formato é dado por: $y = |f(x)|$.

Esta função pode ser substituída por outras duas funções que são equivalentes à função anterior: $\begin{cases} y = f(x) \text{ se } f(x) \text{ for maior ou igual a zero} \\ y = \ f(x) \text{ se } f(x) \text{ for menor que zero} \end{cases}$.

Serão dados alguns exemplos de funções modulares. Todas serão representadas por mais de uma sentença.

Ex. 1: $f(x) = |x|$. Para ser efetuada a construção gráfica, a função modular será desmembrada em duas: $\begin{cases} y = x & \text{se } x \geq 0 \\ y = \ x & \text{se } x < 0 \end{cases}$



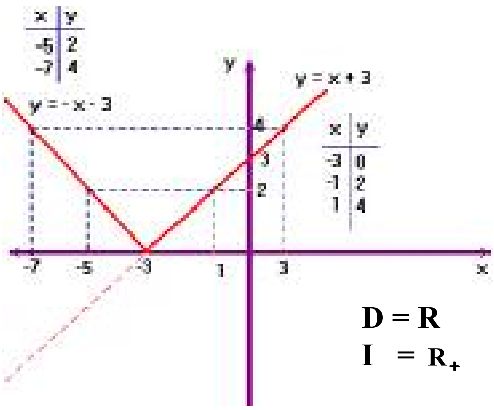
D = R
I = R₊

Observe que a função que estava dentro do módulo (no caso a função identidade **y = x**) foi mantida para valores de y positivos (acima do eixo x).

Já para valores negativos de y (abaixo do eixo x) a função foi rebatida em relação ao eixo x. Foi obtida uma nova função (**y = -x**) simétrica à anterior em relação ao eixo x.

Resumindo: a parte da função que estava "em baixo" do eixo x foi refletida para cima do eixo x. Essa idéia valerá para todas as funções modulares. Daqui em diante, o gráfico da função modular será construído usando tal idéia.

Ex. 2: $f(x) = |x + 3|$. As funções equivalentes serão: $\begin{cases} x + 3 & \text{se } x \geq \ 3 \\ \ x \ \ 3 & \text{se } x < \ 3 \end{cases}$



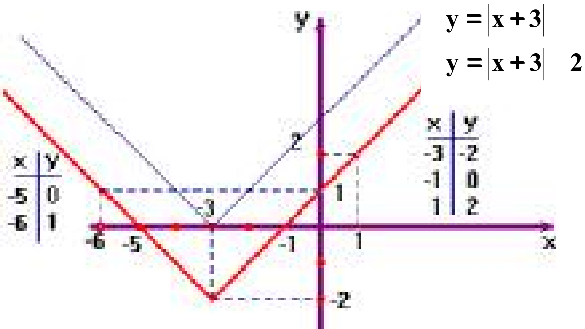
D = R
I = R₊

A função que estava dentro do módulo (**y = x + 3**) foi mantida para valores de x maiores que 3 (acima do eixo x).

Já para valores menores que 3 (abaixo do eixo x), a função foi rebatida em relação ao eixo x. Foi obtida uma nova função (**y = -x - 3**) simétrica à anterior em relação ao eixo x.

Observe também que esta função foi deslocada de 3 unidades para esquerda em relação à função anterior $y = |x|$.

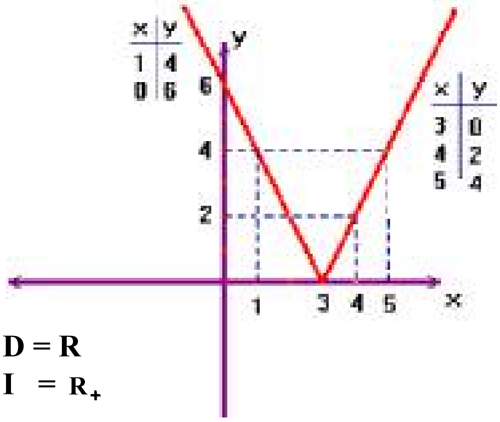
Ex. 3: $f(x) = |x+3| - 2$. As funções equivalentes serão: $\begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq -3 \\ -x-5 & \text{se } x < -3 \end{cases}$



Comparando com a função anterior $y = |x+3|$, constata-se um deslocamento para baixo de 2 unidades. Com isso a imagem passa a incluir números reais negativos.

D = R
I = [−2, +oo]

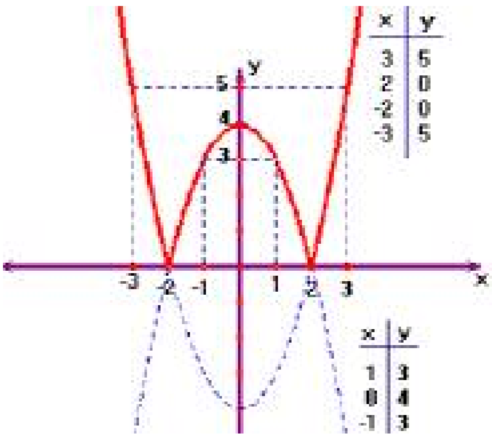
Ex. 4: $f(x) = |2x - 6|$. As funções equivalentes serão: $\begin{cases} 2x-6 & \text{se } x \geq 3 \\ -2x+6 & \text{se } x < 3 \end{cases}$



A letra "V" mudou de inclinação uma vez que coeficiente angular (**a** = **2**) da função de primeiro grau que está dentro do módulo foi aumentado em relação às anteriores.

D = R
I = R_+

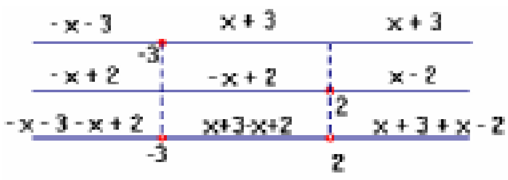
Ex. 5: $f(x) = |x^2 - 4|$. As funções equivalentes serão: $\begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x \geq 2 \text{ ou } x \leq -2 \\ -x^2+4 & \text{se } -2 < x < 2 \end{cases}$



As partes da parábola $y = x^2 - 4$ à direita do 2 e à esquerda do -2 foram mantidas uma vez que tinham y não negativo ("acima" ou no próprio eixo x).

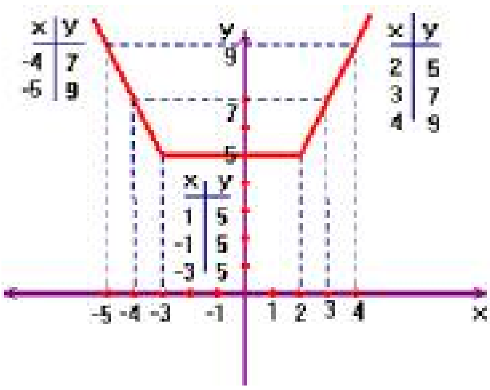
Já a parte da parábola que estava situada entre $-2 < x < 2$ foi rebatida para cima, visto que tinham sinal negativo de y (abaixo do eixo x).

Ex. 6: $f(x) = |x+3| + |x-2|$.



As funções equivalentes serão:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x \geq 2 \\ 5 & \text{se } -3 \leq x < 2 \\ -2x-1 & \text{se } x < -3 \end{cases}$$



Note que agora a função foi dividida em três partes. Uma reta crescente (**a > 0**) para valores de x maiores ou iguais a 2, uma reta constante para x entre -3 e 2 e uma reta decrescente (**a < 0**) para valores de x menores que -3.

EQUAÇÃO MODULAR

Uma equação onde a variável esteja dentro de um módulo é denominada **modular**. Serão resolvidas algumas equações modulares.

Ex. 1: $|x| = 7$ $\Leftrightarrow$ x = 7 ou x = -7

Ex. 2: $|x+1| = 5$

- **x + 1 = 5** $\Leftrightarrow$ **x = 5 – 1** $\Leftrightarrow$ **x = 4**
- **- x - 1 = 5** $\Leftrightarrow$ **x = - 5 - 1** $\Leftrightarrow$ **x = -6**
- Esta segunda parte poderia também ser resolvida como: x + 1 = -5 ou x = -6.

Ex. 3: $|2x - 3| = 4$

- **2x - 3 = 4** $\Leftrightarrow$ **2x = 4 + 3** $\Leftrightarrow$ **x = 7/2**
- **- 2x + 3 = 4** $\Leftrightarrow$ **-2x = 4 - 3** $\Leftrightarrow$ **x = -1/2** ou então fazendo 2 x – 3 = -4, que gera 2x = -1 ou x = -1/2.

Ex. 4: $|5x - 1| = -8$

- **Esta equação não possui solução uma vez que não pe possível que o módulo resulte num número negativo (-8)**

Ex. 5: $|x^2 \quad 3| = 13$

- $x^2 - 3 = 13$ ⇔ $x^2 = 13 + 3$ ⇔ $x^2 = 16$ ⇔ $x = \pm 4$
- $-x^2 + 3 = 13$ ⇔ $x^2 = -13 + 3$ ⇔ $x^2 = -10$ ⇔ $S = \phi$

Poderia também fazer: $x^2 - 3 = -13$ ou ainda $x^2 = -10$, o que acarreta em solução vazia, no campo dos números reais.

Ex. 6: $|x + 3| = 2x \quad 5$

- $x + 3 = 2x - 5$ ⇔ $x = 5 + 3$ ⇔ $x = 8$
- $- x - 3 = 2x - 5$ ⇔ $3x = 5 - 3$ ⇔ $x = 2/3$

(esta solução não serve, pois o resultado de um módulo, no caso 2x – 5, deve ser maior ou igual a zero $\Leftrightarrow 2x \quad 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5/2$**), logo teremos: S = {8}**

Ex. 7: $|x|^2 \quad 5|x| + 6 = 0$

Troca-se $|x|$ **por y:** $y^2 - 5y + 6 = 0 \Leftrightarrow y = 2$ **ou** $y = 3$

- $|x| = 2$ ⇔⇔ $x = \pm 2$
- $|x| = 3$ ⇔⇔ $x = \pm 3$

Ex. 8: $|x + 3| + |x \quad 2| = 4$

- **$x + 3 + x - 2 = 4$ ⇔ $2x = 3$ ⇔ $x = 1,5$ (não serve, pois x deve ser maior que 2)**
- **$x + 3 - x + 2 = 4$ ⇔ $0x = -1$ ⇔ impossível**
- **$- x - 3 - x + 2 = 4$ ⇔ $-2x = 5$ ⇔ $x = -2,5$ (não serve, pois x deve ser menor que -3). Solução vazia.**

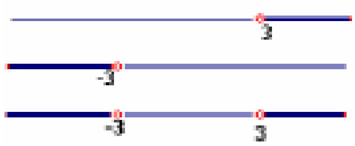
INEQUAÇÃO MODULAR

Uma inequação onde a variável esteja dentro de um módulo é denominada **modular**. Serão resolvidas algumas inequações modulares.

Ex. 1: $|x| > 3$

- $x > 3$
- $-x > 3$ ⇔ $x < -3$

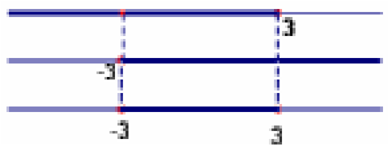
A solução será a união desses dois intervalos:



Ex. 2: $|x| \leq 3$

- $x \leq 3$
- $-x \leq 3$ ⇔ $x \geq -3$

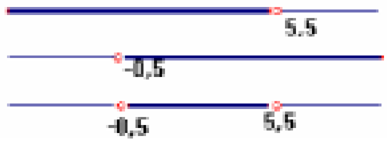
A solução será a interseção desses dois intervalos:



Ex. 3: $|2x - 5| < 6$

- $2x - 5 < 6 \Leftrightarrow x < 11 \Leftrightarrow x < 5{,}5$
- $-2x + 5 < 6 \Leftrightarrow -2x > 1 \Leftrightarrow x > -1/2$

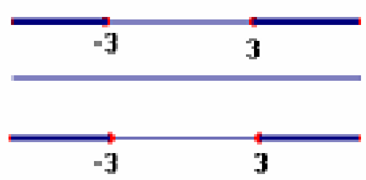
A solução será a interseção desses dois intervalos:



Ex. 4: $|x^2 - 2| \geq 7$

- $x^2 - 2 \geq 7 \Leftrightarrow x^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3$ ou $x \geq 3$
- $-x^2 + 2 \geq 7 \Leftrightarrow -x^2 - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$

A solução será a união desses dois intervalos:



EXERCÍCIOS

1 - Calcule

a) $|-7| - |-3| \cdot |-2 \cdot 3|$

b) $|-4| + |-7| / |4|$

c) $|x^2 - 5x| - 7$ Q$^{\underline{do}}$ $x=-2$

d) $||3 - 7| - 4|$.

2 - Escreva, nos seguintes itens, uma sentença equivalente que não tenha módulo:

a) $|x^3|$ com $x \in \Re^-$

b) $|-2x - 6|$ com $x < -3$

c) $|x - 4|$ com $x < 4$

d) $|x^2 - 9|$ com $-3 < x < 3$

e) $|x + 5|$ com $x \in \Re$

f) $|x - 2| + |x + 3|$ com $x > -3$

g) $|2x + 4| + |x - 3|$ com $x \in \Re$

3 - Diga quais dos itens a seguir apresentam sentenças equivalentes.

a) $|x - 3| \Leftrightarrow x-3$

b) $x^2=9 \Leftrightarrow x=3$

c) $|x - 1| \Leftrightarrow |1 - x|$

d) $||-3| - 7| \Leftrightarrow |7 - |-3||$

e) $x=|5| \Leftrightarrow x=5$

f) $|x + 1| \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2}$

4 - Qual o significado geométrico,utilizando a reta real, das seguintes expressões:

a) $|x|$

b) $|5 - 2|$

c) $|x + 3|$

d) $|-5|$

5 - Se f: $\Re \to \Re$ é dada por f(x) = $|x|$, calcule quando existir:

a) f(7)

b) f(-4)

c) f(0)

d) f(4)

e) x tal que f(x)=8

f) x tal que f(x)=-2

6 - Seja f: $\Re \to \Re$ a função dada por f(x)=$|-3x+15|$.

a) Escreva f(x) sem utilizar módulo
b) Calcule f(2), f(7), f(-1) e f(5) usando a resposta do item a)

7 - Construa o gráfico das seguintes funções definidas de $\Re \to \Re$.

a) f(x)= $\begin{cases} -2x+3 \text{....se...} x \geq 1 \\ 1 \text{.............se....} -1 < x < 1 \\ x \text{ ....se....} x \leq -1 \end{cases}$

b) f(x)=$|x+2|$

c) f(x)=$|-2x-6|$

d) f(x)= $-|3x+12|$

e) f(x)=$|x^2+4x|$

f) f(x)=$|x+1|-3$

g) f(x)=$|x+3|-|x-5|$

h) f(x)=$|3x-6|+3x$

i) f(x)=$|x|/x$

j) f(x)=$1-|x+1|$

8 - Na função y=$|2x-10|$, definida de $\Re$ em $\Re$, diga quais são os valores do domínio que possuem imagem 4.

9 – Identifique o conjunto solução das equações.

a) $|x-7|=10$ **b)** $|2x+9|=12$ **c)** $|5x+1|=x-2$ **d)** $|2-4x|=\frac{x}{2}$ **e)** $|7-2x|=|5x+3|$ **f)** $|x^2+5x|=6$ **g)** $|x|^2-4|x|+3=0$ **h)** $|x^2-2x|=2x$

10 – Quantas e quais são as raízes da equação: $|3x+1|+|2x-7|=6$?

11 – Resolva as inequações:

a) $|2x-3|>5$ **b)** $|1-7x|\leq 2$ **c)** $|x^2-4|<5$ **d)** $|x|^2+3|x|\geq 0$

12 – Que valores de x satisfazem a inequação: $|x|<2x-4$?

13 - (PUC) Para definir módulo de um número real x posso dizer que:

a) é igual ao valor de x se x é real
b) é o maior valor do conjunto formado por x e o oposto de x
c) é o valor de x tal que $x \in N$
d) é o oposto do valor de x
e) é o maior inteiro contido em x

14 - (MACKENZIE) Seja f: $\Re \to \Re$ a função dada por f(x)= $2|x-3|+x-1$. O conjunto-imagem da função f é:

a) $\{y \in \Re / y \geq 2\}$
b) $\{y \in \Re / y \geq 3\}$
c) $\{y \in \Re / y \leq 3\}$
d) $\{y \in \Re / y \leq 2\}$
e) $\Re$

15 - (F.G.V.) Sejam x e y números reais quaisquer. Assinale a afirmação correta:

a) $|x+y| \leq (|x|+|y|)/2$
b) $|x|+|y| > \sqrt{x^2+y^2}$
d) $|xy| > |x| \cdot |y|$
e) $|x|+|y| = 2 \cdot \sqrt{x^2+y^2}$

c) $|x - y| \quad (\big||x| - |y|\big| / 2)$

DESAFIO

1- Faça o gráfico de y=$\big||-x+1| - 3\big|$

2- Sejam x $\Re$ e y $\Re$ .Complete a seguinte lacuna com >, <, $\leq$, , ou =. Justifique.

$|x| + |y|$ ________ $|x + y|$

GABARITO

1-a) -11 **b)**11/4 **c)**7 **d)**0

2-a)$-x^3$ **b)**-2x-6 **c)**-x+4 **d)**$-x^2+9$ **e)** $\begin{cases} x+5 \text{......se....} x > -5 \\ -x-5 \text{..se....} x \leq -5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x+1 \text{...se...} x \quad 2 \\ -5 \text{.......se...} -3 < x < 2 \end{cases}$ **g)** $\begin{cases} 3x+1 \text{.....se...} x \quad 3 \\ x+7 \text{......se....} -2 \leq x < 3 \\ -3x-1 \text{..se....} x < -2 \end{cases}$

3- c, d, e, f

4-a) a distância de um nº até o zero **b)** a distância do 5 ao 2 **c)** a distância de um nº até o -3 **d)** a distância do -5 até o zero

5-a)7 **b)**4 **c)**0 **d)**4 **e)**x=8 ou x=-8 **f)**não existe

6-a)y= $\begin{cases} 3x-15 \text{...se...} x \quad 5 \\ -3x+15 \text{.......se.....} x < 5 \end{cases}$ **b)**f(2)=9 f(7)=6 f(-1)=18 f(5)=0

7-em folha anexa **8-**x=3 e x=7 **9-a)**17 e -3 **b)**1,5 e -10,5 **c)**$\varnothing$ **d)**4/9 e 4/7 **e)**4/7 e -10/3 **f)**-6, 1, -2 e -3 **g)**1, -1, -3 e 3 **h)**0 e 4 **10-**não possui solução

11-a)x > 4 ou x < -1 **b)** $\frac{1}{7} \leq x \leq \frac{3}{7}$ **c)**-3 < x < 3 **d)R** **12-** x > 4 **13-**b **14-**e **15-**c

DESAFIO

1-